UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
Carrera de Física

Tarea de de Mecánica 2 – Ecuaciones de Lagrange

Problema 1

Una cuenta de masa m resbala sin fricción a lo largo de un alambre rígido con forma de parábola $y = Ax^2$. La gravedad apunta en el sentido negativo del eje Y.

(a) Encuentre el Lagrangiano, tomando como coordenada generalizada el desplazamiento horizontal x.

(b) Escriba las ecuaciones de movimiento.

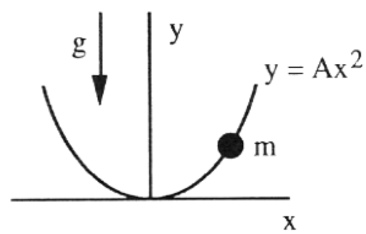

Figura 1: Para el Problema 1

(a) El sistema favorece el uso de coordenadas rectangulares. Para las cuales, $dy = 2Axdx$. Entonces la energía cinética, la energía potencial y el lagrangiano serían respectivamente:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (2Ax\dot{x})^2)$$

Y

$$V = mgy = mgAx^2$$

Entonces:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 4A^2x^2) - mgAx^2 \tag{1}$$

(b) Ahora evaluamos las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4A^2x^2)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = m\ddot{x}(1 + 4A^2x^2) + 8mA^2x\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4mA^2\dot{x}^2x - 2mgAx$$

Finalmente, hacemos uso de $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = \frac{\partial L}{\partial x}$ y luego simplificamos para obtener nuestra ecuación de movimiento:

$$\ddot{x}(1 + 4A^2x^2) + 4A^2x\dot{x}^2 + 2gAx = 0 \tag{2}$$

Problema 2

El punto de suspensión de un péndulo plano se mueve verticalmente de acuerdo a $y = h(t)$, donde $h(t)$ es una función *dada* del tiempo.

(a) Encuentre el Lagrangiano, tomando como coordenada generalizada el ángulo θ que el péndulo forma con la vertical.

(b) Escriba las ecuaciones de movimiento, y muestre que el péndulo se comporta como un péndulo simple en un campo gravitacional $g_{ef} = g + \ddot{h}$.

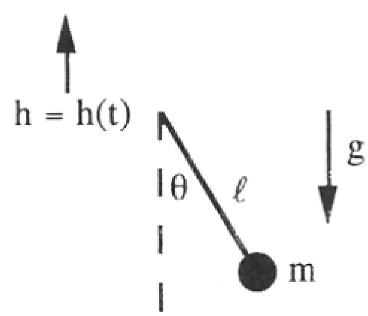

Figura 2: Para el Problema 2

(a) Si $\vec{r}$ es el vector de posición de la masa respecto a un sistema de referencia inercial en el origen. $\vec{h}$ es el vector de posición del soporte movil del péndulo y $\vec{l}$ es el vector de posición de la masa respecto al soporte móvil, usando $\vec{r} = \vec{h} + \vec{l}$ tenemos:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{h}} + \dot{\vec{l}}$$

Como, $\vec{h} = h\hat{j}$, $\vec{l} = l\hat{l}$; De este modo; $\dot{\vec{h}} = \dot{h}\hat{j}$ y $\dot{\vec{l}} = l\dot{\theta}\hat{\theta}$. En esta misma linea de ideas podemos encontrar la magnitud del vector velocidad y encontrar la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{h}\sin\theta)$$

Por su lado la energía potencial se puede tomar como; $V = mg(h - l\cos\theta)$. En conclusión:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{h}\sin\theta) - mg(h - l\cos\theta) \tag{3}$$

(b) Como $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l^2\dot{\theta} + l\dot{h}\sin\theta)$ y $\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml(\dot{\theta}\dot{h}cos\theta - g\sin\theta)$ podemos usar $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = \frac{\partial L}{\partial x}$ y deducir;

$$l\ddot{\theta} + \ddot{h}\sin\theta + \dot{h}\dot{\theta}\cos\theta = \dot{h}\dot{\theta}\cos\theta - g\sin\theta$$

Despues de unas cuantas manipulaciones algebraicas obtenemos:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g_{ef}}{l}\sin\theta \tag{4}$$

Donde claramente se ha usado $g_{ef} = g + \ddot{h}$. Dando a entender que el movimiento es exactamente igual al que tendría el péndulo en un campo gravitacional aumentado en $\ddot{h}$ unidades.

Problema 3

Una masa m está sujeta al extremo de una varilla rígida, liviana, de longitud ℓ. El otro extremo de la varilla está articulado a un pivote, de tal manera que la varilla puede oscilar en un plano. El pivote rota en el mismo plano, en un círculo de radio R, con velocidad angular ω. Demuestre que este "péndulo" se comporta como un péndulo simple en un campo gravitacional $g_{ef} = \omega^2 R$ para todos los valores de ℓ y todas las amplitudes de oscilación.

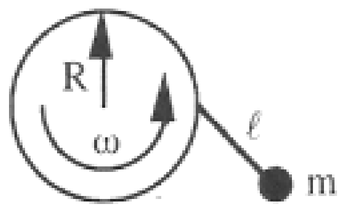

Figura 3: Para el Problema 3

Solución

El vector de posición del soporte del péndulo respecto al origen fijo es $\vec{R} = R\hat{R}$. El vector de posición de la masa m respecto al soporte del péndulo es $\vec{\ell} = \ell\hat{\ell}$. El vector de posición de la masa respecto al origen fijo es $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\ell}$ y el vector velocidad respectivo será $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\ell}}$. Es conveniente utilizar coordenadas polares R y φ con origen en el centro del disco y vectores unitarios $\hat{R}$ y $\hat{\varphi}$. De modo que $\dot{\vec{R}} = R\dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\vec{\ell} = \ell\cos\theta\hat{R} + \ell\sin\theta\hat{\varphi}$ y $\dot{\vec{\ell}} = -\ell\sin\theta\hat{R}(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + \ell\cos\theta\hat{\varphi}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})$. Como no hay ningún indicio de energía potencial, el lagrangiano es simplemente la energía cinética $L = T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$. Haciendo el producto interno ($\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}$) y simplificando obtenemos:

$$L = \frac{1}{2}m[\ell^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos 2\theta) + 2\ell R(\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\theta})\cos\theta + R^2\dot{\varphi}^2] \tag{5}$$

Las coordenadas θ y φ están acopladas, sin embargo son independientes. Además hacemos $\varphi = \omega$ (const) por lo que resolvemos las ecuaciones de lagrange así:

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -m\ell[2\ell\dot{\theta}\omega\sin 2\theta + R(\omega^2 + \omega\dot{\theta})\sin\theta]$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}) = m\ell[\ell\ddot{\theta} - 2\ell\omega\dot{\theta}\sin 2\theta - R\omega\dot{\theta}\sin\theta]$$

Igualando y simplificando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\omega^2 R}{\ell}\sin\theta \tag{6}$$

Que es la expresión que buscabamos. Con $\omega^2 R = g_{ef}$ para apreciar más claramente el movimiento es el de un péndulo

Problema 4

Un péndulo se forma suspendiendo una masa m del techo, usando un resorte de longitud natural ℓ_o y constante k.

(a) Escoja coordenadas generalizadas adecuadas, suponiendo que el péndulo se mueve en un plano vertical fijo, y muéstrelas en un diagrama.

(b) Escriba el Lagrangiano utilizando sus coordenadas generalizadas.

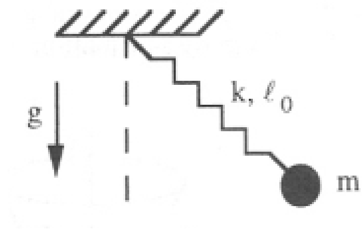

Figura 4: Para el Problema 4

(c) Escriba explícitamente las ecuaciones de Lagrange en sus coordenadas generalizadas.

Solución

(a) y (b) En este caso tenemos energía potencial gravitacional (que de forma simple es $V_g = -mg\cos\theta$) y energía potencial elastica $V_r = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ causada por el resorte. Además podemos expresar la energía cinética en términos de dos coordenadas independientes, ℓ y θ siendo θ el ángulo formado por el resorte y la vertical y ℓ la longitud instantanea del resorte. En este sentido, nuestro lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2) + mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \tag{7}$$

(c) Si primero analizamos la situación en ℓ notamos que

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}}] = m\ddot{\ell}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \ell} = m\ell\dot{\theta}^2 + mgcos\theta - k(\ell - \ell_0)$$

Para θ usamos $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$ y tenemos:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}] = m\ell^2\ddot{\theta} + 2m\ell\dot{\theta}\dot{\ell}$$

junto con:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta$$

Igualando las ecuaciones correspondientes para cumplir con $\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}}] = \frac{\partial L}{\partial \ell}$ y su homologa para θ obtenemos nuestro sistema de ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{\ell} + \frac{k}{m}(\ell - \ell_0) - \ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = 0 \tag{8}$$

Y

$$\ell\ddot{\theta} + 2\dot{\ell}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{9}$$

Problema 5

Un péndulo doble consiste en dos péndulos simples, con uno de los péndulos suspendido de la lenteja del otro. El péndulo "superior" tiene masa m_1 y longitud ℓ_1, el "inferior" tiene masa m_2 y longitud ℓ_2, y ambos se mueven en el mismo plano vertical.

(a) Encuentre el Lagrangiano, usando como coordenadas generalizadas los ángulos θ_1 y θ_2 que los péndulos forman con la vertical.

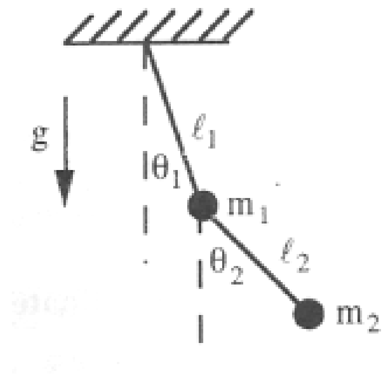

Figura 5: Para el Problema 5

(b) Escriba explícitamente las ecuaciones de Lagrange.

Solución

(a) Primero que todo utilizamos un sistema de referencia polar centrado en el pivote en el techo. El vector que va desde el pivote hasta la masa superior es $\vec{\ell_1} = \ell_1 \hat{r}$. Según la figura el vector que va desde el origen hasta la masa inferior es $\vec{\ell_2} = [\ell_1 + \ell_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]\hat{r} + \ell_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\theta}$
Derivando los vectores anteriores respecto al tiempo podemos obtener el vector velocidad para cada masa quedando:

$$\dot{\vec{\ell_1}} = \ell_1 \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\vec{\ell_2}} = -\ell_2 \dot{\theta_2} \sin(\theta_2 - \theta)\hat{r} + [\ell_1 \dot{\theta} + \ell_2 \dot{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta)]\hat{\theta}$$

Con la salvedad que $\theta_1 = \theta$. Entonces la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 [\ell_2^2 \dot{\theta_2}^2 + \ell_1^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell_2 \ell_1 \dot{\theta_2} \dot{\theta} \cos(\theta_2 - \theta)]$$

Usando como potencial de referencia el origen, observamos facilmente que

$$V = -m_1 g \ell_1 \cos\theta - m_2 g [\ell_2 \cos\theta_2 + \ell_1 \cos\theta]$$

Notamos que el lagrangiano es de la forma $L(\theta, \theta_2; \dot{\theta}, \dot{\theta_2})$ entonces:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 [\ell_2^2 \dot{\theta_2}^2 + \ell_1^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell_2 \ell_1 \dot{\theta_2} \dot{\theta} \cos(\theta_2 - \theta)] + m_1 g \ell_1 \cos\theta + m_2 g [\ell_2 \cos\theta_2 + \ell_1 \cos\theta] \quad (10)$$

(b) Según la expresión anterior del lagrangiano podemos obtener:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_2 \ell_2 \ell_1 \dot{\theta_2} \dot{\theta} \sin(\theta_2 - \theta) - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta} + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta)$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}] = (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta} + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta_2} (\dot{\theta_2} - \dot{\theta}) \sin(\theta_2 - \theta)$$

En forma explicita $\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}] = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ indica que:

$$(m_1 + m_2)(\ell_1 \ddot{\theta} + g \sin\theta) + m_2 \ell_2 [\ddot{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta) - \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_2 - \theta)] = 0 \quad (11)$$

Para θ_2 obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}} = m_2\ell_2^2\dot{\theta_2} + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}\cos(\theta_2 - \theta)$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}] = m_2\ell_2^2\ddot{\theta_2} + m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}\cos(\theta_2 - \theta) - m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}(\dot{\theta_2} - \dot{\theta})\sin(\theta_2 - \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2\ell_2\ell_1\dot{\theta_2}\dot{\theta}\sin(\theta_2 - \theta) - m_2g\ell_2\sin\theta_2$$

En forma explicita $\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}] = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ indica que:

$$(\ell_2\ddot{\theta_2} + g\sin\theta_2) + \ell_1[\ddot{\theta}\cos(\theta_2 - \theta) + \dot{\theta}^2\sin(\theta_2 - \theta)] = 0 \tag{12}$$

Problema 6

Una cuenta de masa m resbala libremente sobre un alambre recto, muy largo, que forma un ángulo α, y rota con velocidad angular constante ω, con respecto a la vertical.

(a) Escoja coordenadas generalizadas apropiadas, y encuentre el Lagrangiano.

(b) Escriba explícitamente las ecuaciones de Lagrange.

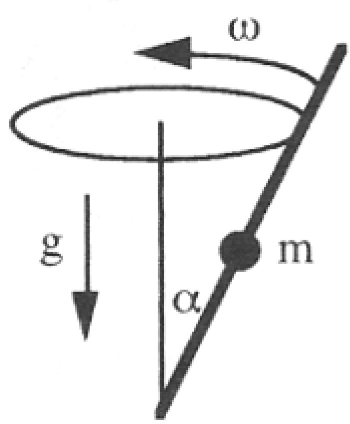

Figura 6: Para el Problema 6

a. Escogemos coordenadas esféricas con origen en un punto del alambre muy por debajo de la posición inicial. Bajo esta configuración el vector de posición es $\vec{\rho} = r\hat{r}$ y por consiguiente; $d\vec{\rho} = dr\hat{r} + rd\phi\hat{\phi}$ y $\dot{\vec{\rho}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$
Con este vector velocidad obtenemos fácilmente la energía cinética; $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$ y potencial; $V = mgr\cos\alpha$. Siendo el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - mgr\cos\alpha \tag{13}$$

Porque $\dot{\phi} = \omega$ donde ω es constante.

b. Utilizando este lagrangiano obtenemos las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mr\dot{\phi}^2 - mg\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}] = m\ddot{r}$$

En forma explicita $\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}] = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ indica que:

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 - g\cos\alpha \tag{14}$$

Problema 7

Usando *coordenadas polares esféricas* (r, θ, ϕ) definidas por

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta\,, \tag{15}$$

escriba el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa m moviéndose en un potencial central $V(r)$.
<u>Solución:</u>
El vector de posición, $\vec{r} = r\hat{r}$ tiene diferencial; $d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$ y por consiguiente un vector velocidad $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$
Por ser $V(r)$ un potencial central solo depende de r, la energía cinética se encuentra haciendo el producto interno de la velocidad, entonces el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin\theta^2\dot{\phi}^2) - V(r) \tag{16}$$

Donde identificamos la dependencia del lagrangiano; $L(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{phi})$. Con esta información planteamos las ecuaciones de lagrange.

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = r\sin\theta^2\dot{\phi}^2 - \frac{V'(r)}{m}$$
$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$$
$$r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}) = 0$$

Por ejemplo, si $\theta = \frac{\pi}{2}$ queda algo conocido:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{V'(r)}{m} \qquad 0 = 0 \qquad r\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{r} = 0$$

Problema 8

El formalismo lagrangiano puede extenderse a sistemas *no conservativos*, modificando en forma *ad hoc* la definición de la función lagrangiana. Considere una partícula de masa m que se mueve en línea recta, con un Lagrangiano

$$L = \exp\left(\frac{\alpha t}{m}\right)(T - V) \tag{17}$$

donde α es una constante, $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ es la energía cinética, y $V = V(x)$ es la energía potencial. Encuentre la ecuación de movimiento e identifique el sistema. ¿Qué significa la constante α?

Solución:

El sistema tiene un grado de libertad

$$L = e^{\frac{\alpha t}{m}}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V) \tag{18}$$

Problema 9

El Lagrangiano para un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 y coordenadas $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ interactuando por medio de un potencial $V(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})$ es

$$L = \frac{1}{2}\, m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}\, m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 - V(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})\,. \tag{19}$$

(a) Reescriba el Lagrangiano en términos de las coordenadas del centro de masa $\mathbf{R}$ y la posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$.

(b) Use las ecuaciones de Lagrange para demostrar que los movimientos del centro de masa y el movimiento relativo se describen por separado, con el centro de masa moviéndose a velocidad constante y un movimiento relativo equivalente al de una partícula de *masa reducida* $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ en un potencial V($\mathbf{r}$).

Problema 10

Considere el movimiento de una partícula libre, con Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\, m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\,, \tag{20}$$

visto desde un sistema de coordenadas rotante

$$u = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad v = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta\,, \qquad w = z\,, \tag{21}$$

donde $\theta = \theta(t)$ es una función conocida del tiempo.

(a) Muestre que en estas coordenadas el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}\, m\left[\left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + 2\Omega\left(u\dot{v} - v\dot{u}\right) + \Omega^2\left(u^2 + v^2\right)\right] \tag{22}$$

donde $\Omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular.

(b) Escriba las ecuaciones de Lagrange, y muestre que son las de una partícula sobre la que actúan tres "fuerzas"[1]. La fuerza proporcional a Ω es llamada *fuerza de Coriolis*, la proporcional a Ω^2 es la *fuerza centrífuga*, y la proporcional a $\dot{\Omega}$ se llama *fuerza de Euler*.

QUe no se vcusmgiewjngvre

[1]Estas son las "fuerzas ficticias" asociadas con la naturaleza no inercial del sistema de referencia rotante.