

Notas de Integrales y Funciones Elípticas

Erika Fernández Gómora

Septiembre 2005

Índice general

Introducción	v
I Integrales Elípticas	1
1. Leyes de Kepler	5
2. Métodos numéricos para aproximar integrales elípticas	9
2.1. Aproximación de la longitud de la gráfica del $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ usando Expansión de Taylor	9
2.2. Aproximación de la longitud de la gráfica del $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ usando el Método del Trapezoide	10
2.3. Promedios aritmético-geométricos.	11
2.4. EJEMPLOS	12
3. Integrales elípticas en problemas de la Mecánica, la Geometría y la Dinámica de Fluidos.	15
3.1. Oscilaciones de un péndulo sin fricción	15
3.2. Encontrar el área de la superficie de la sección separada del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ por el cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, donde $0 < b < a$ y $z \geq 0$	19
3.3. Ondas viajeras para la ecuación de Korteweg - de Vries	21
II Funciones Elípticas	25
4. Mapeos del Semiplano Superior H^+	27
5. Sinus Amplitudinus	37
5.1. ¿Cuál es el orden de los polos de $\text{sn}(z; k)$?	39
5.2. ¿Cómo ajustar $K(k)$ y $K'(k)$ para tener como dominio un cuadrado, es decir, tal que $K(k) = 2K'(k)$?	42
5.3. Funciones meromorfas con polos y ceros dobles.	44
5.3.1. ¿Qué se puede decir de una función meromorfa $g(z)$ con polo doble en $A + iA$ y cero doble en <i>cero</i> ?	44

5.3.2.	¿Qué otras funciones meromorfas $m(z)$ tienen un cero doble en 0 y un polo doble en $A + iA$?	44
5.3.3.	¿Cuántas funciones elípticas con periodos $2A$ y $2iA$ tienen un cero doble en 0 y un polo doble en $A + iA$?	45
6.	Función \mathcal{P} de Weierstrass	47
6.1.	Ecuación Diferencial para $P(z)$	48
6.2.	Ecuación Diferencial para \mathcal{P}	48
7.	Función Theta	51
7.1.	Ecuación de Calor	51
7.2.	Propiedades de las funciones <i>THETA</i>	53
8.	Hacia el problema de inversión	57
8.1.	Funciones Elípticas de Grado 1	58
8.2.	Funciones Elípticas de Grado 2	59
8.3.	Función \mathcal{P} de Weierstrass	60
A.	Korteweg-de Vries	65
	Bibliografía	71

Introducción

Las integrales y funciones elípticas aparecen de manera natural cuando se trata de resolver una gran cantidad de problemas geométricos y físicos, como veremos a lo largo de estas notas.

Parte I

Integrales Elípticas

El origen del término se debe a que hacen su aparición en el contexto de calcular de manera aproximada la longitud de una elipse.

Calculemos esta longitud para conocer la integral elíptica que llamaremos del segundo tipo. Tomando como parametrización de la elipse $\sigma(t) = (a \cos(t), b \operatorname{sen}(t))$ con $b > a > 0$

$t \in [0, 2\pi]$, la longitud queda dada por:

$$\begin{aligned} L(a, b) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2(t) + b^2(1 - \operatorname{sen}^2(t))} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{sen}^2(t) - b^2 \operatorname{sen}^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2(t)} dt \\ &= 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right) \operatorname{sen}^2(t)} dt = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)} dt \end{aligned}$$

tomando $k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} = 1 - \frac{a^2}{b^2}$, que es la excentricidad de la elipse.

A las integrales de este tipo, es decir a las de la forma $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta$ con $0 < k < 1$ las llamaremos integrales elípticas completas del segundo tipo. Este tipo de integrales también las encontramos al calcular la longitud de la gráfica de la función $\operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} L(\operatorname{sen}(x); 0, \frac{\pi}{2}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (1 - \operatorname{sen}^2(x))} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2(x)} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \operatorname{sen}^2(x)} dx \end{aligned}$$

$L(\operatorname{sen}(x); 0, \frac{\pi}{2})$ es una integral del segundo tipo con $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hasta ahora estas integrales han aparecido en problemas geométricos pero la motivación surge de la Mecánica Celeste, en los trabajos de Kepler sobre el movimiento de los planetas.

Capítulo 1

Leyes de Kepler

El problema de describir el movimiento de los planetas se remonta a los Griegos quienes creían que los planetas giran alrededor de la tierra en órbitas circulares. Fue hasta 1543, que Copérnico propone al Sol como el cuerpo alrededor del cual giran los planetas. Aún así, Copérnico mantenía la idea de los griegos con respecto a la órbita que siguen los planetas que es el Sistema Ptolemaico de Epiciclos y Deferentes. Según este Sistema los planetas giran en orbitas circulares pequeñas (Epiciclos) cuyo centro gira alrededor de una órbita circular (Deferentes) mayor centrada en el Sol. La utilización de este sistema requería ajustar el número de epiciclos cada vez que los datos observacionales no coincidían con la teoría. Por lo tanto era muy difícil predecir la posición de los cuerpos a tiempos futuros. Fue Kepler quien trabajando con el reconocido astrónomo Tycho Brahe, propone un modelo a partir de los datos observacionales. Brahe le asignó el proyecto de calcular la órbita de Marte [Ca].

Marte era el planeta que mostraba más diferencias entre los datos observacionales y la teoría que se tenía hasta ese momento, e.d. el modelo de Copérnico. A Kepler le interesaba conocer la posición de Marte con respecto al tiempo. Si $P(0)$ es la posición del planeta al tiempo 0

- (i) ¿Cuál es la posición a un tiempo $t > 0$? Es decir, ¿Podremos parametrizar la posición del cuerpo como una función del tiempo $P(t) = (x(t), y(t))$?
- (ii) ¿Podemos conocer la distancia recorrida por Marte del tiempo $t_0 = 0$ al tiempo t ?

Después de estudiar los datos observacionales recavados por Brahe, Kepler formuló sus *Tres Leyes del Movimiento Planetario*:

- 1ª Los cuerpos celestes se mueven en trayectorias elípticas sobre un plano y el Sol es un foco de dicha órbita.
- 2ª A tiempos iguales se barren áreas iguales

3ª El cuadrado del periodo de revolución de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse determinada por el movimiento de dicho planeta alrededor del Sol.

La primera ley de Kepler contesta la pregunta (i) y (ii), podemos parametrizar la posición de Marte como $P(t) = (a \cdot \cos(\theta(t)), b \cdot \sin(\theta(t)))$ y la distancia recorrida por Marte durante el tiempo $t - t_o$ esta dada por:

$$\begin{aligned} L(a, b) &= \int_{t_o}^t \sqrt{a^2 \sin^2(s) + b^2 \cos^2(s)} \dot{\theta}(s) ds = \\ &= b \int_{t_o}^t \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} \right)^2 \sin^2(s)} \dot{\theta}(s) ds \\ &= b \int_0^t \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} \right)^2 \sin^2(s)} \dot{\theta}(s) ds \end{aligned} \quad (0)$$

A las integrales que aparecen en este contexto las llamamos integrales incompletas del segundo tipo.

Pero aun no sabemos cómo es $\theta(t)$. Lo que sí sabemos por la tercera ley de

Kepler es que el movimiento no es uniforme así que $\dot{\theta}(t)$ no es constante.

Utilicemos la Mecánica Newtoniana para encontrar $\theta(t)$.

La ley de Gravitación nos dice que cualesquiera dos partículas con masa M y m respectivamente se atraen mediante la siguiente relación

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

con G una constante y r la distancia entre las dos partículas.

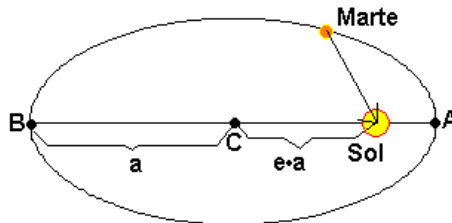
Mientras que la segunda ley de Newton: Una Fuerza F actuando en una masa m le da a la masa una aceleración a y se tiene

$$F = ma$$

Sea $M = \text{masa del Sol}$, $m = \text{masa de Marte}$, podemos pensar al Sol y a Marte como partículas ya que su masa es pequeña con respecto a la distancia entre los dos cuerpos. Si tomamos F como la *fuerza gravitacional* tenemos:

$$G \frac{M}{R^2} = a$$

En nuestro caso, la aceleración actua en la misma dirección del vector Marte-Sol y en dirección de decrecimiento de $R(t)$.



Por lo que la aceleración es una función del Radio R . Ya que

$$a(R) = \ddot{R}(t) - R(t)\dot{\theta}(t)^2$$

$$\ddot{R}(t) - R(t)\dot{\theta}(t)^2 = -\frac{GM}{R(t)^2} \quad (1)$$

Pero la gravitación actua radialmente por lo cual la aceleración no es una función del ángulo θ . Es decir

$$a(\theta) = \frac{1}{R(t)} \frac{d}{dt} \left(R^2(t)\dot{\theta}(t) \right) = 0$$

de esta última ecuación encontramos que

$$R(t)^2\dot{\theta}(t) = c, \text{ para alguna } c \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Nos gustaria tener una ecuación diferencial que solo involucre a R o a θ . Para esto, utlicemos la relación

$$R = \frac{h}{1+e \cdot \cos(\theta)}$$

donde

$e = \text{eccentricidad de la elipse definida por la trayectoria de Marte}$

$h = e \cdot (\text{la distancia del Sol a la directriz de la elipse definida por la trayectoria de Marte})$

sustituyendo en (2) obtenemos

$$\dot{\theta}(t) = c \left(\frac{h}{1+e \cdot \cos(\theta)} \right)^{-2} = \left(\frac{c}{h} \right)^2 (1+e \cdot \cos(\theta))^2 \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{(1+e \cdot \cos(\theta))^2} = \left(\frac{c}{h} \right)^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} \frac{ds}{(1+e \cdot \cos(s))^2} = t \cdot \left(\frac{c}{h} \right)^2$$

Ya se ve complicada la ecuacion de θ y recordemos que para nuestro problema de encontrar la distancia recorrida por Marte en un intervalo de tiempo $(0, t)$ lo que nos interesa es $\theta(t)$.

Para fines prácticos, supongamos que el movimiento es uniforme, es decir $\dot{\theta}(t) = m$, p.a. $m \in \mathbb{R}^+$, para obtener:

$$L(a, b) = b \cdot m \left[\int_0^t \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} \right)^2 \operatorname{sen}^2(s)} ds \right] = b \cdot m \left[\int_0^t \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(s)} ds \right]$$

La distancia recorrida por marte esta dada por una integral que llamaremos elíptica incompleta del segundo tipo.

A continuación describiremos algunos métodos para evaluar integrales elípticas completas. El primer método sera para k pequeño usando expansión de Taylor y el segundo sera para $k \in [0, 1]$ usando métodos numéricos.

Capítulo 2

Métodos numéricos para aproximar integrales elípticas

2.1. Aproximación de la longitud de la gráfica del $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ usando Expansión de Taylor

La longitud de la gráfica del $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ esta dada por:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (1 - \text{sen}^2(t))} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{sen}^2(t)} dt \end{aligned}$$

Si $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces

$$I = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(t)} dt. \text{ Sea } f(x) = (1 + x)^s.$$

Usando series de Taylor obtenemos:

$$f(x) = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)(1+\alpha)^{s-n}}{n!} x^n, \quad \alpha \in (0, x)$$

Esta serie converge absolutamente si $|x| \leq 1$. Por lo tanto $x = -k^2 \text{sen}^2(\phi)$ cumple la condición para tener convergencia absoluta de la serie.

Sea $s = 1/2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \left(\frac{1}{2}\right) [k^2 \text{sen}^2(\phi)] + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{-1}{2} [k^2 \text{sen}^2(\phi)]^2 - \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} [k^2 \text{sen}^2(\phi)]^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \dots \frac{3-2n}{2} [k^2 \text{sen}^2(\phi)]^n dx + R_n$$

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(1+\alpha)^{s-n}}{2^n} \prod_{i=2}^{n+1} (2i-3) \cdot k^{2n} \text{sen}^{2n} \phi$$

$$|R_n| \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \prod_{i=2}^{n+1} (2i-3) \cdot k^{2n} = \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \prod_{i=2}^{n+1} (2i-3) \cdot k^{2n}$$

2.2. Aproximación de la longitud de la gráfica del $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ usando el Método del Trapezoide

Sean

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2n}, x_2 = \frac{\pi}{n}, x_3 = \frac{3\pi}{2n}, \dots, x_i = \frac{i\pi}{2n}, \dots, x_n = \frac{\pi}{2}\}$$

una partición de $[0, \frac{\pi}{2}]$ y

$$y_i = f(x_i) = \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(x_i)} \quad , \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(t)} dt \approx \frac{\pi}{4n} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_j + \dots + 2y_{n-1} + y_n]$$

Una cota para el error utilizando este método es :

$$\text{error} \equiv E \leq \frac{M(\pi/2)^3}{12n^2}, \quad M = \max\{|f''(x)|; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Pero

$$|f''(x)| = \left| -\frac{k^2(-\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) + k^2 \text{sen}^4(x))}{(1+k^2 \text{sen}^2(x))^{3/2}} \right| \leq k^2 |\text{sen}^2(x) + k^2 \text{sen}^4(x) - \cos^2(x)|$$

$$k^2 |\text{sen}^2(x) + k^2 \text{sen}^4(x) - \cos^2(x)| \leq k^2 [1 + k^2]$$

por lo tanto

$$E \leq \frac{k^2[1+k^2]}{96n^2} \pi^3$$

En el caso de la longitud de la gráfica del $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ teniamos que $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ por lo tanto el error esta acotado por

$$\frac{\pi^3}{128n^2} \approx 0,24223653656484231 \frac{1}{n^2}$$

Comparación de la aproximación de $\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(t)} dt$ utilizando método del trapezoide y expansión de Taylor.

n	Trapezoide		Expansión de Taylor	
	Estimación	Error~	Estimación	Error~
1	1.8961188979370398	0.242237	1.9437612854442854	0.25
2	1.9099718215899177	0.0605591	1.9177287682285138	0.09375
3	1.9100969337379137	0.0269152	1.9123053271418946	0.0390625
5	1.9100988937464334	0.00968946	1.9103552187355535	0.00769043
9	1.9100988945138557	0.00299057	1.9101049729345663	0.000362247
15	1.9100988945138557	0.00107661	1.9100989330881069	.0000440870
50	1.9100988945138553	0.0000968946	1.9100988945138562	7.06894 x 10 ⁻¹⁷

Observamos que para n pequeña el método del Trapezoide nos da una mejor estimación del error que por Expansión de Taylor pero conforme n crece Taylor es quien da la mejor estimación del error.

2.3. Promedios aritmético-geométricos.

Ya vimos que calcular la longitud de una elipse (e.d. calcular $L(a, b)$) no es un problema sencillo. Gauss, Ramanujan, Landen y muchos otros grandes matemáticos dieron métodos para aproximar estas integrales. Uno de los más sencillos y útiles es el de promedios Aritmético-Geométricos debido a Gauss.

¿Qué son estos promedios?

Tomemos $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$. Consideremos la siguiente sucesión de promedios aritméticos $\{a_i \mid a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ y } a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \forall n > 1\}_{i \in \mathbb{N}}$ y la siguiente sucesión de promedios geométricos $\{b_i \mid b_1 = \sqrt{ab} \text{ y } b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \forall n > 1\}_{i \in \mathbb{N}}$. Es un ejercicio probar que la sucesión $\{a_i\}$ es decreciente y acotada inferiormente por b mientras que la sucesión $\{b_i\}$ es creciente y acotada superiormente por a . Por lo tanto ambas sucesiones convergen. No solo eso, si el lector hizo el ejercicio habra notado que:

$$b < b_1 < b_2 < b_3 < \dots < a_3 < a_2 < a_1 < a$$

y que las sucesiones convergen al mismo límite. Este límite, que denotaremos por $M(a, b)$, es el promedio aritmético-geométrico.⁽¹⁾

¹American Mathematical Monthly 1988. No.August-September. Pp585-608

¿Qué tienen que ver estos promedios con nuestro problema original: Calcular el perímetro de un elipse?

¡¡TODO!! El siguiente resultado, de Gauss, nos dirá que tanto están relacionadas.

Teorema 1 Sea $|x| < 1$ y $K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1-x^2 \operatorname{sen}^2(s)}}$, entonces

$$M(1+x) = \frac{\pi}{2K(x)}$$

Demostración Ver [AB]

Esto ya se parece más a lo que queremos llegar. John Landen logra, mediante una transformación, relacionar ambas ideas y obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2 Sea $F(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} x^k$, $|x| < 1$,

$(m)_k = m(m+1)(m+2) \cdots (m+k-1)$, entonces

$$L(a, b) = \pi(a+b) \cdot F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)$$

Haciendo uso del **Teorema 2** obtenemos

$$\begin{aligned} L(a, b) &= \pi(a+b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})_k (-\frac{1}{2})_k}{(1)_k k!} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k} \\ &= \pi(a+b) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^2 (-\frac{1}{2}+1)^2 (-\frac{1}{2}+2)^2 \cdots (-\frac{1}{2}+k-1)^2}{(k!)^2} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k} \right] \\ &= \pi(a+b) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{2})^2 (\frac{5}{2})^2 \cdots (\frac{2k-3}{2})^2}{(k!)^2} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k} \right] \\ &= \pi(a+b) \left[1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k} \left(\frac{1}{k!}\right)^2 \prod_{i=1}^k (2i-3)^2 \right] \end{aligned}$$

Una buena aproximación de $L(a, b)$ debida a Ekwall y Sipos es:

$$L(a, b) \approx 2\pi \frac{2(a+b)^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^4}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{a+b}\sqrt[4]{ab}}$$

2.4. EJEMPLOS

1. Consideremos la elipse con ecuación paramétrica $\sigma(t) = (2 \cos(t), \operatorname{sen}(t))$



Usando el resultado anterior aproximemos su perímetro.

$$L(2, 1) = \pi(2 + 1) \left[1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2-1}{2+1} \right)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^k \left(\frac{2-1}{2+1} \right)^{2k} \left(\frac{1}{k!} \right)^2 \prod_{i=1}^k (2i - 3)^2 \right]$$

$$L(2, 1) = 3\pi \left[1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^k \left(\frac{1}{3} \right)^{2k} \left(\frac{1}{k!} \right)^2 \prod_{i=1}^k (2i - 3)^2 \right]$$

$$k = 5 \quad L(2, 1) \sim 9,6884482125373$$

$$k = 9 \quad L(2, 1) \sim 9,6884482205474$$

$$k = 15 \quad L(2, 1) \sim 9,6884482205474$$

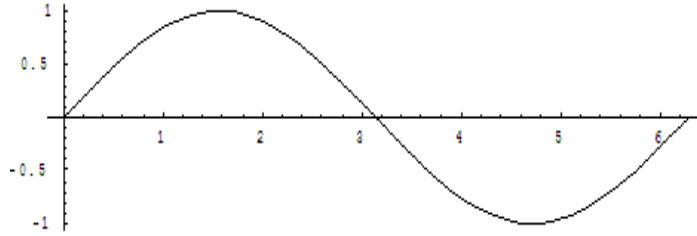
$$k = 50 \quad L(2, 1) \sim 9,6884482205474$$

$$k = 100 \quad L(2, 1) \sim 9,6884482205474$$

Numericamente nos damos cuenta de la rapidez con la que converge la serie.

Utilizando la aproximación de Ekwall obtenemos: $L(2, 1) \sim 9,6884498265932$

2. Calcular la longitud de la gráfica del $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.



$$\begin{aligned} L(\text{sen}(x); 0, 2\pi) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) + \cos^2(x)} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{sen}^2(x) + 2 \cos^2(x)} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{sen}^2(x) + (\sqrt{2})^2 \cos^2(x)} dx \end{aligned}$$

notamos que este problema es análogo al *ejemplo 1* tomando $a = 1$ y $b = \sqrt{2}$

Por lo tanto podemos aproximar esta integral utilizando el método de Gauss-Landen

$$\begin{aligned} L(\text{sen}(x); 0, 2\pi) &= L(1, \sqrt{2}) \\ &= \pi(1 + \sqrt{2}) \left[1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^k \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right)^{2k} \left(\frac{1}{k!} \right)^2 \prod_{i=1}^k (2i - 3)^2 \right] \end{aligned}$$

14CAPÍTULO 2. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APROXIMAR INTEGRALES ELÍPTICAS

k	$L(\text{sen}(x); 0, 2\pi) \sim$	$L(\text{sen}(x); 0, \pi/2) \sim$
5	7,640395578053309	1,9100988945133273
6	7,640395578055384	1,910098894513846
7	7,640395578055423	1,9100988945138557
9	7,640395578055423	1,9100988945138557
15	7,640395578055423	1,9100988945138557
500	7,640395578055423	1,9100988945138557
2,000	7,640395578055423	1,9100988945138557
1,000,000	7,640395578055423	1,9100988945138557

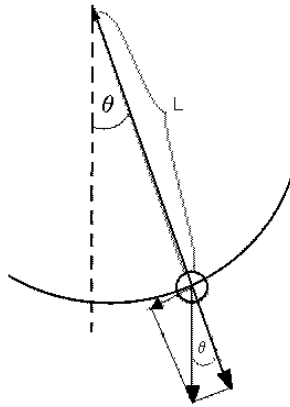
Capítulo 3

Integrales elípticas en problemas de la Mecánica, la Geometría y la Dinámica de Fluidos.

3.1. Oscilaciones de un péndulo sin fricción

Consideremos el sistema mecánico que consiste de una masa m , sujeta en un extremo de una barra rígida e inextensible de longitud L . Suponemos que la barra es tan delgada que no tiene peso, que está fija en el otro extremo y que el sistema oscila de tal manera que el movimiento tiene lugar en un plano.

Si denotamos por $\theta(t)$ el ángulo que forma la barra con la dirección vertical al tiempo t , la posición de la masa al tiempo t es $x(t) = L(\text{sen}(\theta(t)), \cos(\theta(t)))$



Suponemos que las fuerzas que actúan sobre la masa son su peso y la tensión de la barra. Esta última es la responsable de que el movimiento de la masa sea siempre tangencial.

La velocidad de la masa está dada por

$$\dot{x}(t) = L\dot{\theta}(\cos(\theta(t)), \text{sen}(\theta(t)))$$

y la aceleración es:

$$\ddot{x}(t) = L\dot{\theta}^2(-\text{sen}(\theta(t)), -\cos(\theta(t))) + L\ddot{\theta}(\cos(\theta(t)), -\text{sen}(\theta(t)))$$

El primer término representa la componente normal de la aceleración, el segundo término es la componente tangencial.

El balance de las componentes tangenciales de la fuerza debida al peso y de la aceleración nos dan la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta(t)) = 0$$

Este es un sistema conservativo, lo cual es consecuencia de que no estamos considerando la fricción.

Para obtener la ecuación de conservación de energía, multiplicamos por $\dot{\theta}$ e integramos entre 0 y t

$$\int_0^t \dot{\theta}(s) \ddot{\theta}(s) + \dot{\theta}(s) \frac{g}{L} \text{sen}(\theta(s)) ds = 0$$

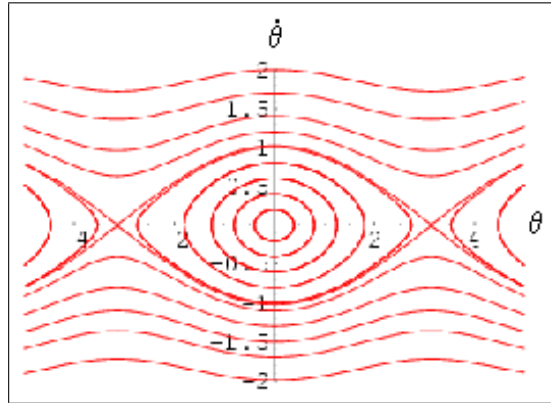
$$\frac{\dot{\theta}(t)^2}{2} - \frac{g}{L} \cos(\theta(t)) - \frac{\dot{\theta}(0)^2}{2} + \frac{g}{L} \cos(\theta(0)) = 0$$

$$\frac{\dot{\theta}(t)^2}{2} - \frac{g}{L} \cos(\theta(t)) = \frac{\dot{\theta}(0)^2}{2} - \frac{g}{L} \cos(\theta(0)) =: E \quad (4)$$

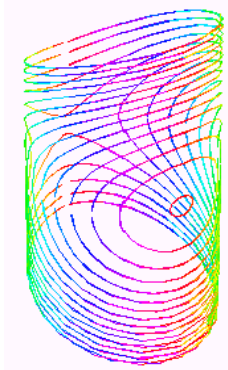
En el plano fase de θ y $\dot{\theta}$, las curvas integrales del sistema son las gráficas de

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2} \sqrt{E + \frac{g}{L} \cos(\theta(t))}$$

Observe que para cada E , la curva integral correspondiente está definida para valores de θ con la propiedad que $-\frac{g}{L} \cos(\theta(t)) \leq E$. En la siguiente figura se muestra una gráfica del plano fase $\theta, \dot{\theta}$.



Observando que es periódica de periodo 2π la podemos graficar en un cilindro cuya circunferencia sea dicho periodo y obtenemos



Tomando $\theta(0) = a$ y $\dot{\theta}(0) = b$ y sustituyendo en (4) obtenemos

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{L}\cos(\theta) + b^2 - 2\frac{g}{L}\cos(a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{L}\cos(\theta) + b^2 - 2\frac{g}{L}\cos(a)}$$

Por lo tanto

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{L}\cos(\theta) + b^2 - 2\frac{g}{L}\cos(a)}} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) + \frac{L}{2g}b^2 - \cos(a)}}$$

utilizando la identidad trigonométrica $\cos(x) = 1 - 2\text{sen}^2(\frac{x}{2})$

$$\begin{aligned} dt &= \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\text{sen}^2(\theta/2) + \frac{L}{2g}b^2 - 1 + 2\text{sen}^2(a/2)}} \\ &= \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{-2\text{sen}^2(\theta/2) + \frac{L}{2g}b^2 + 2\text{sen}^2(a/2)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{-\text{sen}^2(\theta/2) + \frac{L}{4g}b^2 + \text{sen}^2(a/2)}} \end{aligned}$$

Supongamos $b = 0$ y hagamos el cambio de variable

$$\text{sen}(\theta/2) = \text{sen}(a/2) \text{sen}(\phi)$$

$$d\theta = 2 \frac{\text{sen}(a/2) \cos(\phi) d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(a/2) \text{sen}^2(\phi)}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{2 \frac{\text{sen}(a/2) \cos(\phi) d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(a/2) \text{sen}^2(\phi)}}}{\sqrt{-\text{sen}^2(a/2) \text{sen}^2(\theta/2) + \text{sen}^2(a/2)}} = \\ dt &= \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\text{sen}(a/2) \sqrt{1 - \text{sen}^2(\phi)} d\phi}{\sqrt{\text{sen}^2(a/2) (1 - \text{sen}^2(\theta/2)) \sqrt{1 - \text{sen}^2(a/2) \text{sen}^2(\phi)}}} \\ &= \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(a/2) \text{sen}^2(\phi)}} \end{aligned}$$

Sea $k^2 = \text{sen}^2(a/2)$, entonces

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(\phi)}} \quad (5)$$

Integrando (5) respecto a t , podemos calcular el periodo del péndulo que denotaremos por $T(a)$.

$$T(a) = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\phi_{max}} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(s)}}$$

donde ϕ_{max} es el ángulo máximo de apertura del péndulo.

Si k^2 es pequeño (e.d si $k^2 = \text{sen}^2(a/2) < 1/2$), obtenemos una buena aproximación de $T(a)$ por medio de la serie:

$$T(a) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{sen}^2(a/2) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \text{sen}^4(a/2) + \dots \right]$$

Pero lo que nos interesa es determinar la ecuación de movimiento del péndulo. Observemos que cuando τ varía entre 0 y t , θ varía entre a y $\theta(\tau)$ y ϕ varía de ϕ_{max} a $\phi(\tau)$. Integrando (5) obtenemos:

$$\int_0^t d\tau = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\phi_{max}}^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(s)}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\phi_{max}}^0 \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(\phi)}} + \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(\phi)}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\phi_{max}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(\phi)}} + \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(\phi)}}$$

$$t + \frac{1}{4}T(a) = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(s)}}$$

$$\sqrt{\frac{g}{L}} \left(t + \frac{1}{4}T(a) \right) = F(k, \phi)$$

3.2. ENCONTRAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE LA SECCIÓN SEPARADA DEL CILINDRO $X^2+Z^2=A^2$ POR

$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{ds}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2(s)}}$, con k fijo entre cero y uno, es la integral elíptica incompleta del primer tipo.

Vemos la necesidad de invertir la integral $F(k, \phi)$ para encontrar la ecuación de movimiento del péndulo.

La función $F(k, \phi)$ tiene como inversa la ecuación elíptica de Jacobi denotada por $\operatorname{sn}(k, u)$, la cual estudiaremos con detalle más adelante.

Por ahora nos basta saber que esta función satisface:

$$u = F(k, \phi) \leftrightarrow \operatorname{sn}(k, u) = \operatorname{sen}(\phi)$$

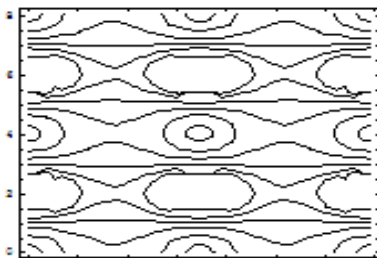
Por tanto en el caso del péndulo

$$\operatorname{sen}(\phi) = \operatorname{sn}(k, \sqrt{\frac{g}{L}}(t + \frac{1}{4}T(a)))$$

$$\frac{1}{k} \cdot \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) = \operatorname{sn}(k, \sqrt{\frac{g}{L}}(t + \frac{1}{4}T(a)))$$

Así, la ecuación del movimiento del péndulo queda expresada como

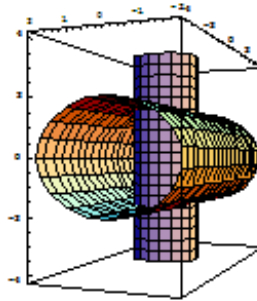
$$\theta(t) = 2 \operatorname{arcsen} \left(k \cdot \operatorname{sn} \left(k, \sqrt{\frac{g}{L}}(t + \frac{1}{4}T(a)) \right) \right)$$



Gráfica de $2 \operatorname{arcsen}[\frac{1}{3} \operatorname{sn}(\frac{1}{3}, u)]$

3.2. Encontrar el área de la superficie de la sección separada del cilindro $x^2+z^2=a^2$ por el cilindro $x^2+y^2=b^2$, donde $0 < b < a$ y $z \geq 0$

Sea $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq b^2, z \geq 0\}$ y $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$



Ya que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ el área de la superficie deseada esta dada por:

$$A \equiv \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2-x^2}} dx dy = \int_{-b}^b \left[\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right] dx =$$

$$A = \int_{-b}^b \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} dy \right] dx = 2a \int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2a \int_{-b}^b \frac{\sqrt{1-(x/b)^2}}{\sqrt{1-(x/a)^2}} dx$$

Sea $s = x/b$, entonces

$$A = 2ab \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-s^2}{1-(\frac{b}{a})^2 s^2}} ds = 4ab \int_0^1 \sqrt{\frac{1-s^2}{1-(\frac{b}{a})^2 s^2}} ds$$

Haciendo el cambio de variable $\text{sen}(\theta) = s$ obtenemos

$$A = 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\text{sen}^2(\theta)}{1-(\frac{b}{a})^2 \text{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)^2}{\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2 \text{sen}^2(\theta)}} d\theta =$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1-\text{sen}^2(\theta)}{\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2 \text{sen}^2(\theta)}} d\theta$$

Sean $k = \frac{b}{a}$ y $\Delta = \sqrt{1-k^2 \text{sen}^2(\theta)}$, entonces

$$\Delta - \frac{1}{\Delta} = \frac{\Delta^2-1}{\Delta} = \frac{1-k^2 \text{sen}^2(\theta)-1}{\Delta} = \frac{-k^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Delta}$$

Por lo tanto $\frac{\Delta}{k^2}(\Delta - \frac{1}{\Delta}) = -\text{sen}^2(\theta)$. Sustituyendo en la integral

$$A = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2(\theta)}} d\theta + 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\Delta}{k^2}(\Delta - \frac{1}{\Delta})}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2(\theta)}} d\theta =$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2(\theta)}} d\theta + \frac{4ab}{k^2} \int_0^{\pi/2} (\Delta - \frac{1}{\Delta}) d\theta$$

3.3. ONDAS VIAJERAS PARA LA ECUACIÓN DE KORTEWEG - DE VRIES 21

$$\begin{aligned}
 &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}} d\theta + \frac{4ab}{k^2} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}} \right) d\theta \\
 &= 4ab \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}} d\theta + \frac{4ab}{k^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta
 \end{aligned}$$

Este tipo de integrales se les denomina integrales elípticas del tercer tipo, por ser una combinación de las de primer y segundo tipos.

3.3. Ondas viajeras para la ecuación de Korteweg - de Vries

La ecuación de movimiento para la superficie de una onda solitaria en agua poca profunda esta dada por

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (6)$$

y es llamada la Ecuación de Korteweg-de Vries ya que Korteweg y de Vries la dedujeron (Ver Apéndice A o [F1]).

Buscamos soluciones de la forma

$$u(x, t) = U(x - ct)$$

con la condición $U^{(n)}(\pm\infty) = 0$ para $n = 0, 1, 2$

Sean $\xi = x - ct$ y $' = \frac{d}{d\xi}$, entonces la ecuación a resolver es

$$-cU' + U''' + 6UU' = 0 \quad (7)$$

Integrando (7) con respecto a ξ obtenemos

$$-cU + U'' + 3U^2 = 0 \quad (8)$$

Que es un sistema conservativo. ya que

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= 0 \\
 E(t) &= \frac{1}{2}U'^2(t) + U^3(t) - \frac{c}{2}U^2(t)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(t) = E(0)$$

Por lo que las curvas integrales de

$$\begin{aligned}\dot{U} &= v \\ \dot{v} &= cU - 3U^2\end{aligned}$$

cumplen que

$$\frac{1}{2}v^2 + U^3 - \frac{c}{2}U^2 = E(0)$$

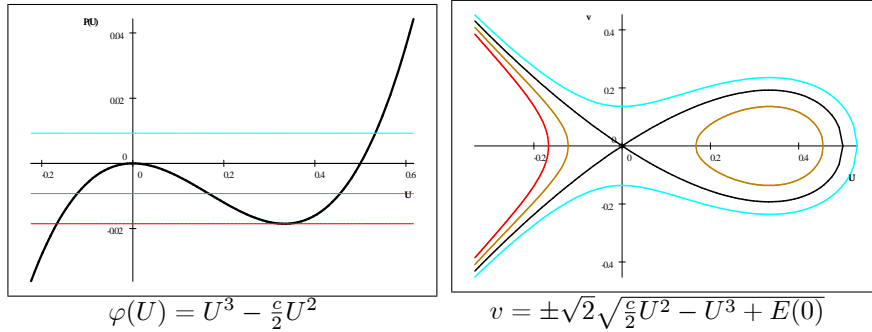
o equivalentemente

$$v = \pm\sqrt{2}\sqrt{\frac{c}{2}U^2 - U^3 + E(0)} \quad (9)$$

que están definidas para

$$U^3 - \frac{c}{2}U^2 \leq E(0)$$

Por lo tanto la gráfica del potencial $\varphi(U) = U^3 - \frac{c}{2}U^2$ determina la estructura de las curvas integrales como se muestra en la siguiente figura



Queremos encontrar soluciones acotadas de (7) con $c > 0$. En esa dirección integremos dos veces (7) de 0 a ξ para obtener

$$\frac{1}{2}U'^2 + U^3 - \frac{c}{2}U^2 = AU + B \quad , \text{con. } A, B \in \mathbb{R}$$

Sean $U_1 < U_2 < U_3$ raíces del polinomio $AU + B - U^3 + \frac{c}{2}U^2$, entonces

$$\frac{dU}{d\xi} = \pm\sqrt{2}\sqrt{\frac{x}{(U - U_1)(U - U_2)(U - U_3)}}$$

Por lo tanto el periodo de oscilación está dado por dos veces T

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{U_2}^{U_3} \frac{du}{\sqrt{(U - U_1)(U - U_2)(U - U_3)}}$$

Además, si $U(0) = U_3$ obtenemos

3.3. ONDAS VIAJERAS PARA LA ECUACIÓN DE KORTEWEG - DE VRIES²³

$$\xi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_{U_3}^U \frac{ds}{\sqrt{(s-U_1)(s-U_2)(s-U_3)}}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_U^{U_3} \frac{du}{\sqrt{(s-U_1)(s-U_2)(-s+U_3)}} \text{ para } U_2 \leq U \leq U_3$$

Sean

$$s = U_3 + (U_2 - U_3) \operatorname{sen}^2(\theta)$$

$$ds = 2(U_2 - U_3) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

$$s - U_1 = U_3 - U_1 + (U_2 - U_3) \operatorname{sen}^2(\theta) = (U_3 - U_1) \left[1 + \frac{U_2 - U_3}{U_3 - U_1} \operatorname{sen}^2(\theta) \right]$$

$$= (U_3 - U_1) [1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)]$$

$$s - U_2 = (U_3 - U_2) [1 - \operatorname{sen}^2(\theta)] = (U_3 - U_2) \cos^2(\theta)$$

$$s - U_3 = (U_2 - U_3) \operatorname{sen}^2(\theta)$$

$$\psi(U) = \operatorname{arcsen} \left(\sqrt{\frac{U - U_3}{U_2 - U_3}} \right)$$

Entonces

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{\psi(U)}^0 \frac{U_2 - U_3 d\theta}{\sqrt{U_3 - U_1} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} (U_3 - U_2)}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{U_3 - U_1}} \int_0^{\psi(U)} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}}$$

Por lo cual

$$U(\xi) = U_2 + (U_3 - U_2) \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{U_3 - U_2}{2}} t; k \right)$$

Recordando que $\xi = x - ct$

En el periodo vuelven a aparecer las integrales elípticas y para encontrar $U(x - ct)$ nos volvemos a encontrar con el problema de inversión.

Parte II

Funciones Elípticas

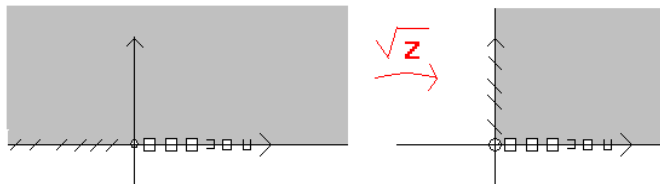
Capítulo 4

Mapeos del Semiplano Superior H^+

Ejemplos de mapeos de H^+ en

- 1) El Primer Cuadrante: $f(z) = \sqrt{z}$

La elección del argumento $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ permite calcular la imagen del eje real.



- 2) Una franja $\Upsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid -A < \text{Re}(z) < A \text{ y } \text{Im}(z) > 0\}$

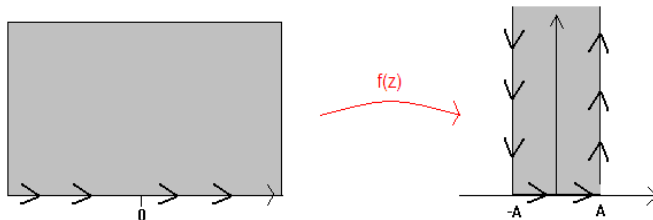


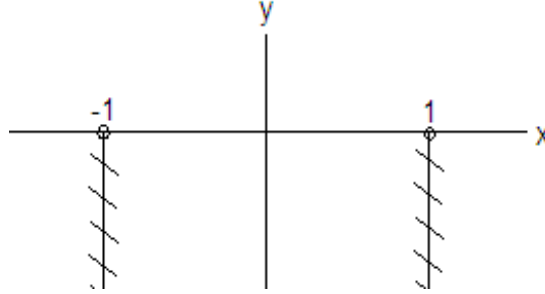
Figura 8

Supongamos que $f(\mathbb{R}) =$ la frontera orientada de la franja Υ (como se muestra en la figura 8)

Sea $\gamma(x) = x$ si $x \in \mathbb{R}$ y $\sigma(x) = f(\gamma(x)) = f(x)$

Queremos que la tangente a la imagen dada por $\sigma'(x) = f'(x)$ cambie de dirección en 90° al cruzar $x = -1, 1$

Una solución es $f'(z) = \sqrt{x^2 - 1}$ para $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto $f'(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}$ para todo $z \in H^+$. Tomando cortes rama como se muestra en la siguiente figura



ya que nos interesa la imagen del eje real y el semiplano superior.

Entonces $f(z) = \int_0^z \sqrt{s^2 - 1} ds$ es un buen candidato.

Examinemos algunas propiedades de esta función:

(i) $f(0) = 0$

(ii) Si $-1 < s < 1$

$$s = 1 + (1 - s)e^{i\pi} = -1 + (1 + s)e^{i0}.$$

Por lo tanto

$$\sqrt{s^2 - 1} = \sqrt{1 - s}e^{i\pi/2} \sqrt{s + 1}e^{i0} = i\sqrt{1 - s^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(\{x + i \cdot y \mid x \in [0, 1], y = 0\})) &= \\ &= \{x + i \cdot y \mid x = 0, y \in [0, \frac{\pi}{4}]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(\{x + i \cdot y \mid x \in [-1, 0], y = 0\})) &= \\ &= \{x + i \cdot y \mid y \in [-\frac{\pi}{4}, 0], x = 0\} \end{aligned}$$

Si $s > 1$ entonces $s = 1 + (s - 1)e^{i0} = -1 + (1 + s)e^{i0}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \int_1^x \sqrt{s^2 - 1} ds = \frac{\pi}{4}i + r(x) \\ r(x) &> 0, \quad r(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(\mathbb{R})$ queda con orientación negativa y $f(H^+)$

es una franja horizontal.

Para corregir la orientación de $f(\mathbb{R})$ necesitamos

$$f(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} \text{ rotada } 90^\circ,$$

es decir, considerar

$$G(z) = i \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \int_0^z \frac{ds}{e^{-i\pi/2}\sqrt{s^2-1}} = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

La imagen de H^+ bajo esta función es

$$\{w \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(w) < \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{Im}(w) > 0\}.$$

Por lo tanto basta ajustar el ancho de la banda para tener

la función deseada

$$f(z) = \frac{2A}{\pi} \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}.$$

3) Un rectángulo

Siguiendo la idea del ejemplo anterior.

Candidato :

$$f(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} \quad \text{con } a > 1.$$

Los puntos de ramificación son $-a, -1, 1, a$ y la elección de las ramas del argumento es:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_j < 3\frac{\pi}{2}.$$

Entonces para $z \in \mathbb{R}$, $z > 1$

$$f(z) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} + \int_1^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = f(1) + \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}}$$

Sea $k = \frac{1}{a} < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
f(1) &= - \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{a^2-s^2}} = -\frac{1}{a} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1^2-(\frac{s}{a})^2}} = \\
&= -k \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1^2-k^2s^2}} = -k \cdot F(k, \pi/2 + 2n\pi) := -K(k)
\end{aligned}$$

Así

$$f(z) = -K(k) + \int_1^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = -K(k) + \int_1^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}}$$

Observemos que $f(z)$ tiene puntos de ramificación en $-a, -1, 1$ y a . Entonces

$$\begin{aligned}
z &= 1 + r_1 e^{i\theta_1}, \quad r_1 = |1-s| \\
&= -1 + r_2 e^{i\theta_2}, \quad r_2 = |1+s| \\
&= a + r_3 e^{i\theta_3}, \quad r_3 = |a-s| \\
&= -a + r_4 e^{i\theta_4}, \quad r_4 = |a+s| \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Analicemos la imagen del semiplano superior H^+ bajo $f(z)$:

1) Determinar la imagen de $[0, a]$

a) $f(0) = 0$, $f(1) = -K(k)$

b) Sea $x \in (0, 1)$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}} e^{-i\pi}, \quad \text{por lo tanto}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = - \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{a^2-s^2}} < 0$$

$$\Rightarrow f([0, 1]) = [0, -K(k)]$$

c) Sea $x \in (1, a)$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}} \frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}} (-i),$$

Por lo tanto,

$$f(x) = f(1) - i \int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{a^2-s^2}} = -K(k) - i \int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{a^2-s^2}}$$

En particular

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = f(1) - i \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= -K(k) - i \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{a^2-x^2}} = -K(k) - i \cdot k \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}} \end{aligned}$$

Sea $K'(k) = k \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}$, entonces

$$f(a) = -K(k) - i \cdot K'(k)$$

Podemos concluir

$$\begin{aligned} f([1, a]) &= \{z = x + iy \mid x = -K(k), y \in (0, -K'(k))\} \\ f([0, 1]) &= [0, -K(k)] \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} f([-1, 0]) &= [K(k), 0] \\ f([-a, -1]) &= \{(x, y) \mid x = K(k), y \in (-K'(k), 0)\} \end{aligned}$$

2) Determinar la imagen bajo f de $[a, \infty]$

Sea $x > a$ y $a < s < x$, entonces

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = -K(k) - i K'(k) + \int_a^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}}$$

Notemos que $\int_a^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} > 0$

Para determinar $f(\infty)$ necesitamos calcular

$$I := \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-a^2}}$$

Haciendo el cambio de variable $t = a/x$

$$I = \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{(a/t)^2-1}\sqrt{(a/t)^2-a^2}} = -\frac{1}{a} \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\sqrt{1-t^2}} =$$

$$I = k \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-k^2t^2}\sqrt{1-t^2}} = K(k)$$

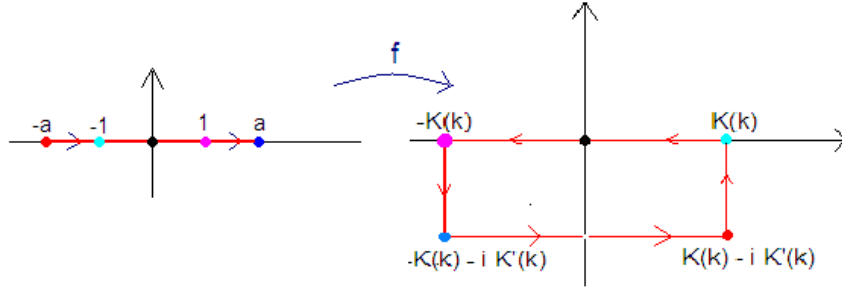
Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(a) + \int_a^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -K(k) - iK'(k) + \int_a^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}} = \\ &= -K(k) - iK'(k) + iK'(k) = -iK'(k) \end{aligned}$$

$$f([a, \infty]) = \{z = x + iy \mid x \in (-K(k), 0), y = -iK'(k)\}$$

Analogamente

$$f((-\infty, -a]) = \{z = x + iy \mid x \in (0, K(k)), y = -iK'(k)\}$$



Ahora sabemos que la imagen del eje Real es la frontera del rectángulo con vértices en

$$-K(k), -K(k) - iK'(k), K(k) - iK'(k), K(k).$$

Denotaremos a dicho rectángulo como D .

Más aun, $f(z)$ es analítica y conforme en H^+ ya que

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}\sqrt{z^2-a^2}} \neq 0 \text{ en } H^+$$

De hecho f es 1-1 en H^+ y suprayectiva en D :

Afirmación $f(H^+) = D$ y para cada $w \in \text{int}(D)$ existe un único $z \in H^+$ tal que $f(z) = w$.

Demostración Sea $w_o \in \text{Interior de } D$. Sea

$$N(w_o) = \text{Número de soluciones de } f(z) = w_o \text{ con } z \in H^+$$

Sea γ una curva simple cerrada en H^+ tal que $f(z) \neq w_o$ para todo $z \in \gamma$, entonces

$$N_\gamma(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_o} dz = \text{Número de soluciones de } f(z) = w_o \text{ encerradas por } \gamma$$

Tomamos $R > a$

$$\gamma_R(\theta) = R \cdot e^{i\theta} \quad , \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$\Gamma_R := [-R, R] + \gamma_R(\theta)$$

$$N_{\Gamma_R}(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f'(x)}{f(x)-w} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f'(z)}{f(z)-w} dz$$

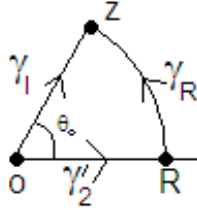
Observemos que

$$|f'(Re^{i\theta})| = \left| \frac{1}{\sqrt{R^2 e^{i\theta^2} - 1} \sqrt{R^2 e^{i\theta^2} - a^2}} \right| = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{y} \quad |dz| = \pi R$$

Para estimar $\left| \frac{1}{f(z)-w} \right|$ en γ_R , demostraremos que

$$\lim_{z \rightarrow -\infty, z \in H^+} f(z) = -iK'(k)$$

Tomemos $z = Re^{i\theta_0} \in \gamma_R$ y sea $\gamma_1 = t \cdot z$ con $t \in [0, 1]$.



Entonces

$$f(z) = f(R) + \int_0^{\theta_0} \frac{iR e^{i\theta}}{\sqrt{R^2 e^{i\theta^2} - 1} \sqrt{R^2 e^{i\theta^2} - a^2}} ds = f(R) + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

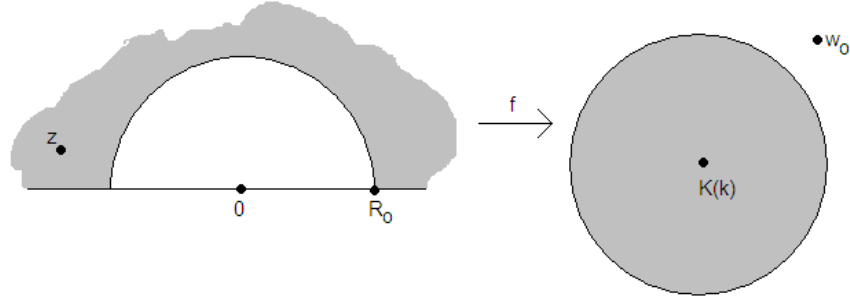
Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow -\infty, z \in H^+} f(z) = \lim_{R \rightarrow -\infty} f(R) = -iK'(k).$$

Así $\exists R_o > 0$ tal que

$$|f(z) + iK'(k)| < \frac{1}{2} |w_o + iK'(k)| \quad \text{para } |z| \geq R_o$$

como se muestra en la siguiente figura



Entonces no hay soluciones de $f(z) = w_o$ con $|z| \geq R_o$ pues

$$|f(z) - w_o| \geq |w_o + iK'(k)| - |f(z) + iK'(k)| \geq \frac{1}{2} |w_o + iK'(k)|$$

Se sigue que para $R \geq R_o$:

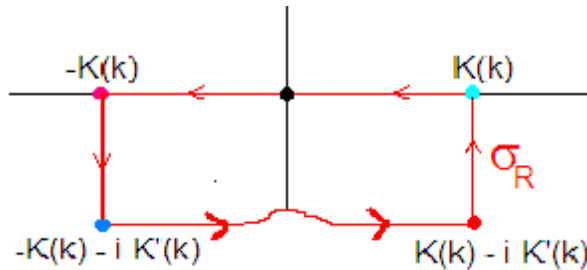
$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{f'(z)}{f(z) - w_o} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2} = \frac{\pi}{R} \rightarrow 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

$N_R(w_o)$ toma valores en los naturales y tiene límite cuando $R \rightarrow \infty$

Por lo tanto $\exists R_1$ tal que $N_{\gamma_R}(w_o) = N_{\gamma_{R_1}}(w_o) \quad \forall R \geq R_1$ y además

$$N_{\gamma_R}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - w} dx \quad \text{para } R \geq R_1$$

Observemos que $\sigma_R := f(\Gamma_R)$ es una curva simple orientada positivamente como se muestra



y si R es tal que w_o queda en la región encerrada por σ_R se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R} \frac{dv}{v - w_o} = 1$$

entonces

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R} \frac{dv}{v-w_o} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f'(z)}{f(z)-w} dz = N_R(w),$$

es decir

$$N(w) = 1 \quad \forall w \in \text{Interior de } D$$

Por lo tanto :

- f es 1-1 y $f(H^+) = D$
- f tiene una inversa que denotaremos por $sn(z; k)$ la función "sinus amplitudinus" de *Jacobi*.

La función $sn(z; k)$ es analítica en D . Ahora extenderemos por simetría ésta función a todo el plano.

Capítulo 5

Sinus Amplitudinus

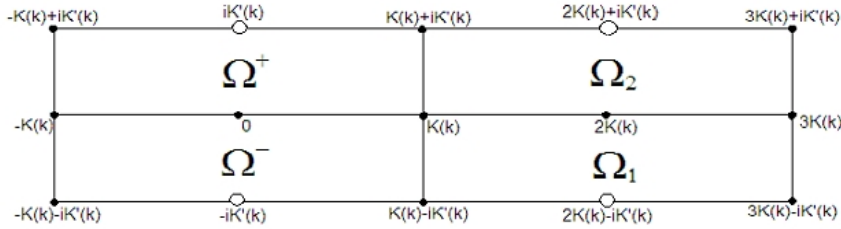
Sean

$$D := \Omega^-$$

Ω^+ = Reflexión de Ω^- con respecto al eje real,

Ω_1 = Reflexión de Ω^- con respecto a la recta $\text{Re}(z) = K(k)$

Ω_2 = Reflexión de Ω^+ con respecto a la recta $\text{Re}(z) = K(k)$



Por reflexión de Schwarz extendemos $sn(z; k)$ por simetría a Ω^+ , es decir, para $z \in \Omega^+$

$$sn(z; k) := \overline{sn(\bar{z}; k)}$$

Así, $sn(z; k)$ es analítica en $\Omega^- \cup \Omega^+$ y

$$sn(\Omega^+; k) = H^-.$$

El siguiente paso es extender $sn(z; k)$ a Ω_1 , reflejando con respecto a $\text{Re}(z) = K(k)$

Si $z \in \Omega_1$, su simétrico respecto a esta recta es $z^* = 2K(k) - \bar{z}$, por lo cual

$$sn(z; k) = \overline{sn(z^*; k)} = \overline{sn(2K(k) - \bar{z}; k)}$$

Es por ésto que después de la reflexión, con respecto a $\text{Re}(z) = 3K(k)$, (donde $z^* = 6K(k) - \bar{z}$) para $z \in \Omega_3$

$$sn(z; k) = \overline{sn(6K(k) - \bar{z}; k)} = sn(2K(k) - \overline{(6K(k) - \bar{z})}; k) = sn(z - 4K(k); k).$$

Por lo tanto $sn(z; k)$ es analítica en $\Omega := \Omega^- \cup \Omega^+ \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ y

$$sn(\Omega_1; k) = H^-, \quad sn(\Omega_2; k) = H^+.$$

Es decir $sn(z; k)$ cumple:

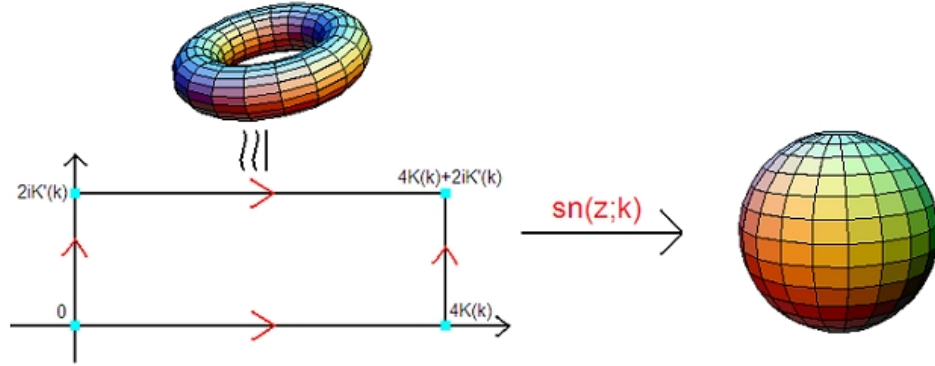
(i) Esta definida y es analítica en el rectángulo con vértices en $-K(k) + iK'(k)$, $3K(k) + iK'(k)$, $-K(k) - iK'(k)$ y $3K(k) - iK'(k)$.

(ii) $sn(-iK'(k); k) = \infty = sn(2K(k) - iK'(k); k)$

(iii) $sn(z; k) = sn(z + 4K(k); k)$, $sn(z; k) = sn(z + 2iK'(k); k) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
Es decir, tiene dos periodos independientes y por lo tanto no se puede expresar en terminos de funciones elementales.

Continuando la extensión por simetría, se obtiene una función meromorfa en el plano que es doblemente periódica con periodos $4K(k)$ y $2iK'(k)$.

Podemos pensar a $sn(z; k)$ como una función del toro $T^2 = \mathbb{C} / (4K(k)\mathbb{Z} + 2iK'(k)\mathbb{Z})$ en la esfera S^2 .



Sea \square el rectángulo con vértices en $-K(k) + i2K'(k)$, $3K(k) + i2K'(k)$, $-K(k)$ y $3K(k)$.

$\Gamma =$ parametrización positiva de $\partial\square$

$$\Gamma_1 = \gamma_1(x) = x \quad \text{con } x \in [-K(k), 3K(k)]$$

$$\Gamma_2 = \gamma_2(x) = 3K(k) + ixK'(k) \quad \text{con } x \in [0, 2]$$

$$\Gamma_3 = \gamma_3(x) = (1-x)3K(k) - xK(k) + i2K'(k) \quad \text{con } x \in [0, 1]$$

$$\Gamma_4 = \gamma_4(x) = -K(k) + (1-x)(i2K'(k)) \quad \text{con } x \in [0, 1]$$

Así $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ y

$$\int_{\Gamma_1} sn(z; k) dz = \int_{-K(k)}^{3K(k)} sn(x; k) dx$$

$$\int_{\Gamma_3} sn(z; k) dz = \int_{-K(k)}^{3K(k)} sn(x + i2K'(k); k) dz = - \int_{\Gamma_1} sn(z; k) dz$$

Analogamente

$$\int_{\Gamma_2} sn(z; k) dz = - \int_{\Gamma_4} sn(z; k) dz$$

Por lo tanto

$$\int_{\Gamma} sn(z; k) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} sn(z; k) dz = 0 \quad (10)$$

Por otra parte

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} sn(z; k) dz = Res [sn(z; k); z = iK'(k)] + Res [sn(z; k); z = 2K(k) + iK'(k)] \quad (11)$$

De (10) y (11) concluimos

$$Res [sn(z; k); z = iK'(k)] = -Res [sn(z; k); z = 2K(k) + iK'(k)]$$

Es decir, la suma de los residuos en un dominio fundamental es CERO. (resultado cierto para cualquier función doblemente periódica)

Observación Dado $w \in \mathbb{C}$ la ecuación $sn(z; k) = w$ con $w \in \Omega$ tiene dos soluciones

Demostración Se tienen las soluciones por construcción

5.1. ¿Cuál es el orden de los polos de $sn(z; k)$?

Recordemos que

$$\begin{aligned} I &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(sn(z; k))'}{sn(z; k) - w} dz = \\ &= \text{Número de ceros de } (sn(z; k) - w) \text{ encerrados por } \Gamma - \text{Número de} \\ &\quad \text{polos de } (sn(z; k) - w) \text{ encerrados por } \Gamma. \end{aligned}$$

Ceros y polos contados con multiplicidades. Escogiendo w de tal manera que no existan soluciones de $sn(z; k) = w$ en Γ . Entonces

$$I = 2 - \text{Número de polos de } sn(z; k) \text{ encerrados por } \Gamma$$

Por otra parte

$$I = 0$$

ya que el integrando es elíptico y la derivada hereda la periodicidad con lo mismos periodos de $sn(z; k) : 4K(k)$ y $2iK'(k)$

Por lo tanto

$$2 = \text{Número de polos de } sn(z; k) \text{ encerrados por } \Gamma$$

Como sabemos existen 2 polos entonces éstos son simples.

Regresando al problema original:

¿Existe una transformación conforme y 1-1 de H^+ en un rectángulo con vértices $0, a, ib$ y $a + ib$ ($a, b > 0$) ?

Hemos resuleto el problema para un rectángulo con vértices en

$$-K(k), -K(k) - iK'(k), K(k) - iK'(k), K(k)$$

mediante la función

$$f(z, k) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{s^2-a^2}}.$$

Una solución al problema que nos estamos planteando sería encontrar k_o tal que $2K(k_o) = a$ y $K'(k_o) = b$.

En esa dirección analicemos propiedades de la función $K(k)$:

1) $K(k)$ es una función creciente de k (con $k \in (0, 1)$) ya que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ lo es.

2) $K((0, 1)) = (0, \infty)$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} K(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} k \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} K(k) = \lim_{k \rightarrow 1^-} k \lim_{k \rightarrow 1^-} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 \cdot \infty = \infty$$

y como $K(k)$ es creciente 1) entonces $K((0, 1)) = (0, \infty)$.

De 1) y 2) podemos concluir que $2K(k) = a$ tiene una única solución k_o en $(0, 1)$. Pero para k_o fija $K'(k_o) = b$ sólo tiene solución para un valor de $b!!!$

Por otra parte, queremos que

$$2 \frac{K(k)}{K'(k)} = \frac{a}{b}$$

o equivalentemente

$$\frac{K(k)}{K'(k)} = \frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}}{\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}} = \frac{a}{2b}.$$

Analicemos la monotonía de las integrales para demostrar que $\frac{K(k)}{K'(k)}$ es una función creciente de k con imagen $(0, \infty)$.

i) Por 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ es creciente.

ii) $E(k) := \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}$ es decreciente. Demostraremos esto comparando esta integral con $\frac{1}{k}K(k)$

Sea $y = \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} \rightarrow dy = \frac{k^2x dx}{(1-k^2x^2)^{3/2}}$. Por lo tanto

$$K(k) = k \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = k \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}} y \frac{k \cdot y}{\sqrt{1-(1-k^2)y^2}} \frac{dy}{ky^2\sqrt{y^2-1}} = k \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}} \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{1-(1-k^2)y^2}}.$$

$$\frac{1}{k}K(k) = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}} \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{1-(1-k^2)y^2}} = E(\sqrt{1-k^2})$$

Por lo tanto $E(k)$ es una función decreciente en k ya que:

$\frac{1}{k}K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ y $\sqrt{1-k^2}$ son funciones creciente y decreciente respectivamente en $k \in (0, 1)$.

Concluimos de i) y ii) que $\frac{K(k)}{K'(k)}$ es una función creciente en k . Más aun,

Afirmación $H((0, 1)) = (0, \infty)$ con $H(k) = \frac{K(k)}{K'(k)}$

Demostración Por una parte

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\frac{1}{k})^2x^2}}$$

por convergencia monotonía se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\frac{1}{k})^2x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

Por otra parte,

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{y^2+k^2}} \quad \text{con } y = \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{x^2-1}}$$

Sea $w = \frac{1}{y+1}$ entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{y^2+k^2}} = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{w^2+(1-w)^2}\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 w^2+(1-w)^2}} \quad \text{con } k \in (1, \infty)$$

Pero

$$\frac{1}{\sqrt{w^2+(1-w)^2}\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 w^2+(1-w)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{w^2+(1-w)^2}(1-w)} \geq \frac{1}{(1-w)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-w)^2} \rightarrow \infty$$

entonces, por convergencia monotona se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{w^2+(1-w)^2}\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 w^2+(1-w)^2}} = \infty \quad (13)$$

Concluimos de (12) y (13) que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} H(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2 x^2}}}{\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{w^2+(1-w)^2}\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 w^2+(1-w)^2}}} = \frac{\pi/2}{\infty} = 0 \quad (14)$$

Análogamente

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} H(k) = \infty \frac{1}{\pi/2} = \infty \quad (15)$$

Es decir, la imagen de $\frac{K(k)}{K'(k)}$ es el intervalo $(0, \infty)$ para $k \in (0, 1)$.

Por lo tanto existe $k_o \in (0, 1)$ tal que $\frac{K(k_o)}{K'(k_o)} = \frac{a}{2b}$.

Sea $\lambda = \frac{b}{K'(k_o)}$ y $h(z) = \lambda \cdot z$. Entonces

$$v(z) := h(\text{sn}(z, k_o)) + \frac{a}{2} + ib$$

manda al semiplano superior en el rectangulo con vértices en $0, a, ib, a + ib$.

5.2. ¿Cómo ajustar $K(k)$ y $K'(k)$ para tener como dominio un cuadrado, es decir, tal que $K(k)=2K'(k)$?

Con el método de la sección anterior, basta tomar $a = b$. Ahora veremos otra construcción.

Sea $F(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{s^2-1}}$, los cortes rama como antes

Determinemos la imagen del eje real bajo F

5.2. ¿CÓMO AJUSTAR $K(K)$ Y $K'(K)$ PARA TENER COMO DOMINIO UN CUADRADO, ES DECIR, TAL QUE

·) Sea $z = x \in (0, 1)$, entonces

$$\sqrt{s-1} = \sqrt{1-s}e^{i\pi/2}$$

$$\sqrt{s+1} = \sqrt{s+1}$$

$$F(x) = -i \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}}$$

$$F(1) = -i \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}} \equiv -i A$$

·) Para $x > 1$, $1 < s < x$ tenemos

$$F(x) = -i A + \int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}}$$

$$F(\infty) = -i A + \int_1^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}} \equiv -i A + B$$

Sea $t = \frac{1}{s} \rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx$ entonces

$$B = \int_1^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t^2}} = A$$

Procedemos como en caso anterior y concluimos:

a) $F(H^+) = \text{Cuadrado con vértices en } 0, A, -A - iA \text{ y } -iA$

b) F tiene periodos $2A$ y $2iA$.

c) F tiene una inversa definida en ese cuadrado. La extendemos por simetría y obtenemos una función meromorfa con

·) periodos $2A$, $i2A$

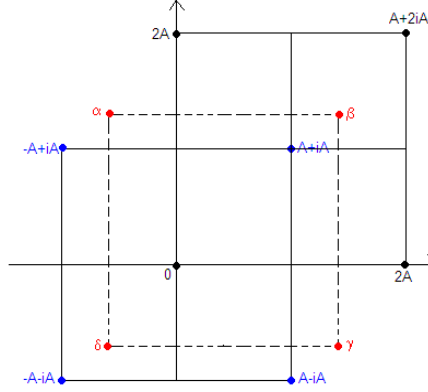
·) polos en $-A(1+i)$ y en general, en

$$-A - iA + n2A + im2A = 2(n - \frac{1}{2})A + 2i(m - \frac{1}{2})A$$

d) Sea $\Omega = \text{cuadrado con vértices } 0, 2A, i2A, 2A + i2A$. La inversa de F (llamémosla P) toma cada valor en el plano 2 veces por lo tanto $-A + iA$ es un polo doble con residuo cero.

Por lo tanto esta función es diferente de la que se obtiene con la integral elíptica de grado cuatro.

Traslademos el cuadrado Ω al cuadrado con vértices en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (como se muestra en la siguiente figura).



Sabemos que $P(0) = 0$, $P'(0) = \frac{1}{F'(0)} = 0$. Por lo tanto el cero es doble. Así tenemos P y P' tienen los mismos periodos y los mismos polos.

5.3. Funciones meromorfas con polos y ceros dobles.

5.3.1. ¿Qué se puede decir de una función meromorfa $g(z)$ con polo doble en $A + iA$ y cero doble en *cero*?

La función $r_o(z) = \frac{z^2}{(z-(A+iA))^2}$ cumple con las condiciones de cero y polo de multiplicidad 2.

Si g es función racional $g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ($p, q = 1$) y tiene los mismos ceros y polos que $r_o(z)$. Entonces

$$p(z) = Az^2 \quad \text{y} \quad q(z) = B(z - A - iA)^2$$

Por lo tanto, todas las funciones racionales que satisfacen la condición de ceros y polos son de la forma

$$\frac{Az^2}{B(z-A-iA)^2} = \frac{A}{B} r_o(z)$$

5.3.2. ¿Qué otras funciones meromorfas $m(z)$ tienen un cero doble en 0 y un polo doble en $A + iA$?

Análisis Local

Tomemos $m(z)$ meromorfa con cero doble en *cero* y polo doble en $A + iA$. Entonces existen $\phi_1(z)$ analítica en una vecindad del *cero* que cumple $\phi_1(0) \neq 0$ tal que

$$m(z) = z^2 \phi_1(z)$$

y $\phi_2(z)$ analítica en una $|z - (A + iA)| < \delta$ que cumple $\phi_2(A + iA) \neq 0$ tal que

$$m(z) = \frac{\phi_2(z)}{(z-(A+iA))^2}$$

Análisis Global

$T(z) = \frac{m(z)}{r_o(z)}$ es meromorfa con singularidades en 0 y $A+iA$. La singularidad en cero es removible ya que

$$T(z) = \frac{z^2 \phi_1(z)}{(z-(A+iA))^2} = \frac{\phi_1(z)}{(z-(A+iA))^2} \text{ es analítica en } z=0$$

Por lo tanto $T(z)$ es entera y distinta de cero en todo el plano complejo. Entonces

$$m(z) = r_o(z)H(z)$$

con $H(z)$ entera y distinta de cero en todo \mathbb{C} .

5.3.3. ¿Cuántas funciones elípticas con periodos $2A$ y $2iA$ tienen un cero doble en 0 y un polo doble en $A+iA$?

Vimos en 5.2 que la función $P(z)$ cumple estas condiciones

Si $h(z)$ es una función elíptica con cero doble en 0 , polo doble en $A+iA$ y periodos $2A$ y $2iA$ distinta de $P(z)$ se tiene:

$\frac{P(z)}{h(z)}$ es entera y elíptica, por lo tanto acotada en $\bar{\Omega}$ y así $\frac{P(z)}{h(z)} = c \in \mathbb{C}$. Es decir

$$P(z) = c \cdot h(z)$$

Capítulo 6

Función \mathcal{P} de Weierstrass

¿Cómo construir una función meromorfa con polos en $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$?

Candidato:

$$\mathcal{P}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{[z - (n + im)]^2} - \frac{1}{[n + im]^2} \quad (16)$$

Convergencia:

Para z fijo se tiene

$$\frac{1}{[z - (n + im)]^2} - \frac{1}{[n + im]^2} = \frac{-z^2 + 2z(n + im)}{[z - (n + im)]^2 [n + im]^2}$$

Si $\sqrt{n^2 + m^2} \geq 2|z|$

$$|z - (n + im)|^2 \geq (\sqrt{n^2 + m^2} - |z|)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2 + m^2}\right)^2 = \frac{1}{4}(n^2 + m^2)$$

Por lo tanto

$$\frac{|z|^2}{|z - (n + im)|^2 |n + im|^2} \leq \frac{4|z|^2}{(n^2 + m^2)^2}$$

y como

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}} \frac{1}{[n^2 + m^2]^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[1 + (\frac{n}{m})^2]^2} \leq c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3}$$

si $\sqrt{n^2 + m^2} > 2|z|$, entonces $\sum_{n,m \in \mathbb{N}} \frac{1}{[n^2 + m^2]^{3/2}}$ converge. Además,

$$\frac{2|z||n + im|}{|z - (n + im)|^2 |n + im|^2} \leq \frac{8|z|}{(n^2 + m^2)\sqrt{n^2 + m^2}} = \frac{8|z|}{(n^2 + m^2)^{3/2}}$$

Se sigue que la serie converge uniforme y absolutamente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} - (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.

Así nuestro candidato es una función meromorfa con polos dobles en $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$.

A $\mathcal{P}(z)$ le llamamos la función \mathcal{P} de *Weierstrass*.

¿Qué relación hay entre la función P de Weierstrass y $P(z)$ la inversa de $\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}}$?

6.1. Ecuación Diferencial para $P(z)$

Sea $F(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}}$ entonces $z = F(P(z)) = \int_0^{P(z)} \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{1-s^2}}$, por lo cual

$$1 = \frac{P'(z)}{\sqrt{P(z)}\sqrt{1-P(z)^2}} \quad \text{ó}$$

$$\frac{(P'(z))^2}{2} = \frac{P(z)}{2} (P(z)^2 - 1) \quad (17)$$

Tenemos que, para t real, $P(t)$ es una solución real y periódica del sistema conservativo

$$\ddot{x} - \frac{3}{2}x^2 + x = 0$$

(Ecuación similar a las ondas viajeras para KdV)

Es decir, este sistema mecánico tiene soluciones periódicas dadas por

$$P(t), t \in \mathbb{R}$$

6.2. Ecuación Diferencial para \mathcal{P}

La función

$$\mathcal{P}'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{-2}{[z - (n+im)]^3}$$

es elíptica con polos en $n + im \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ y periodos i y 1 .

Sean

$$S_1(z) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{[z - (n+im)]^2} - \frac{1}{[n+im]^2}$$

$$S_2(z) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{[z - (n+im)]^3}$$

Entonces

$$\mathcal{P}'(z) = \frac{-2}{z^3} - 2S_2(z)$$

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + S_1(z)$$

$$\mathcal{P}'(z)^2 = \frac{4}{z^6} + \frac{8}{z^3} S_2(z) + 4(S_2(z))^2$$

$$\mathcal{P}(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^4} S_1(z) + \frac{3}{z^2} (S_1(z))^2 + (S_1(z))^3$$

$$\mathcal{P}'(z)^2 - 4\mathcal{P}(z)^3 = 4S_2(z)^2 + \frac{8}{z^3} S_2(z) - \frac{12}{z^4} S_1(z) - \frac{12}{z^2} S_1(z)^2 - 4S_1(z)^3$$

Por otra parte

$$S_1(z) = S_1(0) + S_1'(0) \cdot z + S_1''(0) \frac{z^2}{2!} + S_1'''(0) \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$S_1(0) = 0$$

$$S_1'(0) = 2! \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^3} = 0$$

$$S_1''(0) = 3! \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^4}$$

$$S_1'''(0) = -4! \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^5} = 0$$

Observamos que $S_1^{(2j+1)}(0) = 0$

Más aun

$$\begin{aligned} \overline{S_1^{(j)}(0)} &= \overline{\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^j}} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n-im)^j} = \\ &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^j} \end{aligned}$$

Concluimos así

- $S_1^{(j)}(0) \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\overline{S_1(z)} = S_1(\bar{z})$
- $\overline{\mathcal{P}(z)} = \overline{\frac{1}{z^2} + S_1(z)} = \frac{1}{\bar{z}^2} + \overline{S_1(z)} = \frac{1}{\bar{z}^2} + S_1(\bar{z}) = \mathcal{P}(\bar{z})$

Analogamente

$$S_2(0) = 0$$

$$S_2'(0) = -3 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^4}$$

$$S_2''(0) = 0$$

$$S_2^{(2l)}(0) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

Así mismo:

- $S_2^{(l)}(0) \in \mathbb{R} \quad \forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\overline{S_2(z)} = S_2(\bar{z})$
- $\overline{\mathcal{P}'(z)} = \mathcal{P}'(\bar{z})$

Por lo tanto la parte singular de $\mathcal{P}'(z)^2 - 4\mathcal{P}(z)^3$ en $z = 0$ es de orden $\frac{1}{z^2}$ y es:

$$-g_2 \cdot \frac{1}{z^2} \quad \text{con} \quad g_2 = \left(60 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^4} \right)$$

Entonces

$$\mathcal{P}'(z)^2 - 4\mathcal{P}(z)^3 = -\frac{g_2}{z^2} + h(z)$$

con $h(z)$ analítica en $z = 0$

$$\mathcal{P}'(z)^2 - 4\mathcal{P}(z)^3 + g_2\mathcal{P}(z) = h_1(z)$$

con h_1 analítica en $z = 0$

Pero $\mathcal{P}'(z)^2 - 4\mathcal{P}(z)^3 + g_2\mathcal{P}(z)$ es elíptica, por lo tanto constante. Dicha constante es

$$-g_3 = -140 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(n+im)^6}$$

Es decir

$$\mathcal{P}'(z)^2 - 4\mathcal{P}(z)^3 + g_2\mathcal{P}(z) = -g_3.$$

Por lo tanto

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z))^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3 = 4(\mathcal{P} - e_1)(\mathcal{P} - e_2)(\mathcal{P} - e_3) \quad (18)$$

Esta función también da soluciones periódicas de un sistema conservativo similar al de las ondas viajeras para KdV

De (17) y (18) demostraremos que

$$P(z) = c\mathcal{P}_A(z + (A + iA)) \quad (19)$$

$$\text{con } \mathcal{P}_A(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{[z - (2nA + i2Am)]^2} - \frac{1}{[2An + i2Am]^2}.$$

Esta relación saldrá de la función \mathcal{THTA} principalmente.

Capítulo 7

Función Theta

7.1. Ecuación de Calor

Para resolver la ecuación en derivadas parciales

$$u_t = u_{xx} \quad \text{en } [0, \pi]$$

con condiciones de frontera periódicas

$$u(0, t) = u(\pi, t) \quad , \quad u(x, 0) = f(x)$$

Se construye la solución fundamental, que corresponde a

$$u(x, 0) = \delta_o(x) \quad , \quad \delta_o \text{ es la } \textit{delta de Dirac} \text{ en } x = 0$$

Para

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot e^{i2nx}$$

la solución queda de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) \cdot e^{i2nx}$$

$$\dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t)$$

$$c_n(t) = f_n \cdot e^{-4n^2 t}$$

$$c_n(0) = f_n$$

como en nuestro caso $f = \delta_0$ tenemos que $f_n = 1$
Entonces la solución fundamental es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4n^2 t} \cdot e^{i2nx}$$

que converge $\forall t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ ($z \in \mathbb{C}$)

Por este tipo de expresiones aparece la función *THETA*.

Para cada $\tau \in H^+$ se cumple $|e^{i\pi\tau}| < 1$ y por lo tanto $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que

$$|e^{i\pi\tau}| = e^{-4t}$$

Consideremos la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in^2\pi\tau} \cdot e^{inz} \quad \text{con } z \in \mathbb{C} \text{ y } \text{Im}(\tau) > 0 \quad .$$

A esta serie la llamaremos la función *THETA*

$$\theta(z \mid q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot e^{i2nz} \quad , \quad q = e^{i\pi\tau}$$

La serie converge absoluta y uniformemente para $z \in \mathcal{K}$ con $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ compacto pues

$$|q| = e^{-\pi\text{Im}(\tau)} < 1$$

Por lo tanto $\theta(z \mid q)$ es entera.

Por otra parte

$$\theta(z + \pi \mid q) = \theta(z \mid q) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

entonces no tiene un segundo periodo independiente, ya que de tenerlo, por ser entera sería constante.

Aun así podemos encontrar relaciones interesantes entre $\theta(z + \pi\tau \mid q)$ y $\theta(z \mid q)$, veamos

$$\begin{aligned} \theta(z + \pi\tau \mid q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot e^{i2n(z+\pi\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot e^{i2n\pi\tau} \cdot e^{i2nz} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2+2n} \cdot e^{i2nz} = q^{-1}e^{-i2z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)^2} \cdot e^{i(n+1)2z} = \\ &= q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta(z \mid q) \end{aligned}$$

A $\pi\tau$ se le llama un cuasiperiodo y decimos que $\theta(z \mid q)$ es cuasi-doblemente periódica con factor de periodicidad o multiplicador: $q^{-1} \cdot e^{-i2z}$.

Definimos

- $\theta_4(z \mid q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot e^{i2nz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot \cos(2nz)$ función par de z
- $\theta_3(z \mid q) = \theta_4\left(z + \frac{\pi}{2} \mid q\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cdot \cos(2nz)$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \theta_1(z \mid q) &= -ie^{i(z+\frac{\pi\tau}{4})} \cdot \theta_4\left(z + \frac{\pi\tau}{4} \mid q\right) = \\
&= -ie^{i(z+\frac{\pi\tau}{4})} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot e^{in\pi\tau} \cdot e^{i2nz} = \\
&= -ie^{i(z+\frac{\pi\tau}{4})} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} \cdot e^{in\pi\tau} \cdot e^{i2nz} = \\
&= -i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cdot e^{i(2n+1)z} = \\
&= -i \cdot q^{1/4} e^{iz} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cdot \text{sen}((2n+1)z) \\
\blacksquare \theta_2(z \mid q) &= \theta_1\left(z + \frac{\pi}{2} \mid q\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cdot \text{sen}((2n+1)z)
\end{aligned}$$

Las funciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 son enteras para cada $\tau \in H^+$

Cada θ_j es función periódica de z con periodo π , es decir

$$\theta_j(z + \pi \mid q) = \theta_j(z \mid q)$$

θ_4 tiene cuasiperiodo $\pi\tau$ y factor de periodicidad $-q^{-1} \cdot e^{-i2z}$, que heredan θ_1, θ_2 y θ_3 .

$$\begin{aligned}
\theta_4(z + \pi\tau \mid q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot e^{i2nz} \cdot e^{i2n\pi\tau} = \\
&= q^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} \cdot e^{i2nz} = \\
&= -q^{-1} \cdot e^{-i2z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} \cdot e^{i2(n+1)z} = \\
&= -q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z \mid q).
\end{aligned}$$

Observación Si $\theta_j(z_0; q) = 0$ entonces $\theta_j(z_0 + k\pi\tau; q) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Demostración Inmediata del comentario anterior.

7.2. Propiedades de las funciones \mathcal{THETA}

Sea Q el paralelogramo con vértices en $a, a + \pi, a + \pi\tau$ y $a + \pi + \pi\tau$, de tal forma que $\theta_4(z; q) \neq 0$ para $z \in \partial Q$.

¿Cuántos ceros tiene θ_4 en Q ?

Por el principio del argumento tenemos que el número de ceros buscados está dado por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{\theta'_j(z; q)}{\theta_j(z; q)} dz$$

Una parametrización de ∂Q está dada por:

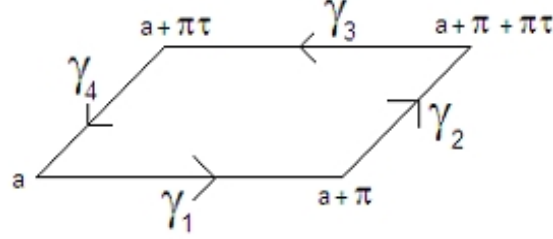


figura2

$$\gamma_1(t) = a + t \cdot \pi$$

$$\gamma_2(t) = a + \pi + t \cdot \pi \cdot \tau$$

$$\gamma_3^{-1}(t) = \gamma_1(t) + \pi \cdot \tau$$

$$\gamma_4^{-1}(t) = \gamma_2(t) - \pi$$

Entonces

$$\int_{\gamma_3} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z+\pi\tau;q)}{\theta_4(z+\pi\tau;q)} dz$$

Por otra parte derivando

$$\theta'_4(z + \pi\tau | q) = \frac{d}{dz} \theta_4(z + \pi\tau | q) = -q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta'_4(z | q) + 2iq^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z | q)$$

Por lo tanto

$$\frac{\theta'_4(z+\pi\tau|q)}{\theta_4(z+\pi\tau|q)} = \frac{-q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta'_4(z|q)}{-q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z|q)} + \frac{2iq^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z|q)}{-q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z|q)}$$

Regresando a la integral anterior obtenemos

$$\int_{\gamma_3} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz = - \int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz + 2i \int_{\gamma_1} dz = - \int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz + 2i\pi$$

y por periodicidad tenemos que

$$\int_{\gamma_2+\gamma_4} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz + \int_{\gamma_2+\gamma_4} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{\theta'_4(z;q)}{\theta_4(z;q)} dz \right] = 1.$$

Es decir, $\theta_4(z)$ tiene exactamente un cero en Q y dicho cero, que denotaremos por z_o , es simple porque la integral lo cuenta con multiplicidad (El análisis es análogo para $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ se deja como ejercicio para el lector.).

Recordemos que si f es una función elíptica con periodos $2w_1, 2w_2$; Q un paralelogramo fundamental con vértices en $a, a + 2w_1, a + 2w_2$ y $a + 2w_1 + 2w_2$ con a tal que f no contenga ceros ni polos en ∂Q entonces

$$\int_{\partial Q} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Otra manifestación de que las funciones θ_j no son doblemente periódicas. (Por periodicidad y por principio del argumento el número de ceros de f en Q es igual al número de polos de f en Q)

Capítulo 8

Hacia el problema de inversión

Dados dos periodos independientes ¿Existe una función elíptica con esos periodo, polos y ceros especificados?

En general no siempre podremos construir funciones elípticas con condiciones arbitrarias. Ésto es debido al siguiente resultado.

Teorema 8.0 Si f es una función analítica con periodos $2w_1$, $2w_2$ y Q es un paralelogramo fundamental en los que a_1, \dots, a_n y b_1, \dots, b_n son los ceros y polos entonces

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = k \cdot 2w_1 + l \cdot 2w_2 \quad \text{con } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Demostración Sea f una función meromorfa con ceros en $\{a_j\}_{j=1}^n$ y polos en $\{b_j\}_{j=1}^n$ posiblemente repetidos (dependiendo de multiplicidad) en una región Q . Entonces, por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_{\partial Q} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

Si f es elíptica de periodos $2w_1$ y $2w_2$ ¿Cuánto vale $\int_{\partial Q} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$?

Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 como en *figura 2*.

$$\int_{\gamma_3} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \int_{\gamma_1} (z + 2w_2) \cdot \frac{f'(z+2w_2)}{f(z+2w_2)} dz = - \int_{\gamma_1} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz - 2w_2 \int_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Sea $\sigma_1(t) = f(\gamma_1(t))$, entonces σ_1 es una curva cerrada, por lo cual

$$\int_{\gamma_1} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\sigma_1} \frac{dw}{w} = \kappa 2\pi i$$

Analogamente para γ_2 y γ_4 . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[-2w_2 \int_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - 2w_1 \int_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] = \\ &= 2w_2 k + 2w_1 l \end{aligned}$$

8.1. Funciones Elípticas de Grado 1

Definición. Una función elíptica que tiene un cero simple y un polo simple en Q (paralelogramo fundamental) se dice que tiene grado 1.

Problema Dados a_1 , b_1 en Q . ¿Podemos construir una función elíptica con periodos π y $\pi\tau$, cero simple en a_1 , polo simple en b_1 ?

Candidato:

$$\varphi(z) = \frac{\theta_4(z-a_1+z_o; q)}{\theta_4(z-b_1+z_o; q)}$$

Para que este candidato sea el bueno tiene que ser una función periódica de periodo $\pi\tau$. Calculemos.

$$\varphi(z + \pi\tau) = \frac{-q^{-1} \cdot e^{-i2(z-a_1+z_o)} \cdot \theta_4(z-a_1+z_o; q)}{-q^{-1} \cdot e^{-i2(z-b_1+z_o)} \cdot \theta_4(z-b_1+z_o; q)} = e^{-i2(b_1-a_1)} \varphi(z)$$

Por lo tanto φ es elíptica si y sólo si $b_1 - a_1 = m \cdot \pi$ para algún entero m . Entonces

$$\varphi(z) = \frac{\theta_4(z-a_1+z_o; q)}{\theta_4(z-a_1-m\cdot\pi+z_o; q)} = 1.$$

Así, $\varphi(z)$ es trivial. Si f es elíptica de grado 1, entonces \exists un único b_1 polo simple de f . Por lo tanto

$$f(z) = \frac{R_1}{z-b_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b_n)^n$$

y por periodicidad se tiene

$$R_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} f(z) dz = 0$$

Entonces b_1 es singularidad removible !!! Por lo tanto f es analítica y por tanto constante.

Así se tiene el siguiente resultado

Teorema 8.1 Las únicas funciones elípticas de grado 1 son las funciones constantes.

8.2. Funciones Elípticas de Grado 2

Ahora buscamos funciones elípticas con ceros en a_1 , a_2 y polos en b_1 , b_2 en Q (paralelogramo fundamental determinado por los periodos).

Candidato a función elíptica con periodos $\pi\tau$ y π :

$$\phi(z) = \frac{\theta_4(z-a_1+z_o; q) \cdot \theta_4(z-a_2+z_o; q)}{\theta_4(z-b_1+z_o; q) \cdot \theta_4(z-b_2+z_o; q)}$$

Procedemos como en el caso de las de grado 1 y concluimos que $\phi(z)$ cumple la condición de los periodos si y sólo si

$$b_1 + b_2 - (a_1 + a_2) = m \cdot \pi \quad \text{y} \quad b_1 + b_2 - (a_1 + a_2) = l \cdot \pi \cdot \tau$$

para $m, l \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto ϕ es elíptica con periodos π y $\pi\tau$ pero están condicionados los ceros y polos, así que no siempre va a ser la que buscamos.

Dados periodos $2w_1$, $2w_2$ y $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q$ tales que

$$a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) = k \cdot 2w_1 + l \cdot 2w_2 \quad \text{y} \quad \frac{w_1}{w_2} \in H^+$$

podemos construir una función elíptica con periodos $2w_1$, $2w_2$ ceros en a_1, a_2 ; polos en b_1, b_2 . A saber la función

$$M(z) = \frac{\theta_4\left(\frac{z-a_1}{2w_1}\pi + z_o; q\right) \theta_4\left(\frac{z-a_2}{2w_1}\pi + z_o; q\right)}{\theta_4\left(\frac{z-b_1}{2w_1}\pi + z_o; q\right) \theta_4\left(\frac{z-b_2}{2w_1}\pi + z_o; q\right)}$$

Para la periodicidad en $2w_2$ tomemos $\pi\tau = \frac{w_1}{w_2}$ y ajustemos.

Ejemplo: La función *sinus amplitudinus de Jacobi* es una función elíptica de grado 2.

Sea Q el rectángulo con vértices en

$$-\frac{1}{2}K(k) - i\frac{1}{2}K'(k), -\frac{1}{2}K(k) + i\frac{3}{2}K'(k), \frac{7}{2}K(k) - i\frac{1}{2}K'(k), \frac{7}{2}K(k) - i\frac{3}{2}K'(k).$$

Entonces

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2K(k), \quad b_1 = i \cdot K'(k), \quad b_2 = 2K(k) + iK'(k).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 - (a_1 + a_2) &= 2K(k) + 2iK'(k) - 2K(k) = 2iK'(k) = \\ &= 0 \cdot \pi + 1 \cdot \pi \cdot i\frac{2}{\pi}K'(k). \end{aligned}$$

Como queremos $\tau \in H^+$ tomamos $\tau = i\frac{2}{\pi}K'(k)$. Entonces

$$b_1 + b_2 - (a_1 + a_2) = m \cdot \pi + l \cdot \pi\tau$$

con $m = 0$ y $l = 1$.

Por otra parta, la función

$$\Psi(z) = \frac{\theta_4\left(\frac{z}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)}{\theta_4\left(\frac{z-iK'(k)}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)} \frac{\theta_4\left(\frac{z-2K(k)}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)}{\theta_4\left(\frac{z-(2K(k)+iK'(k))}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)}$$

tiene ceros simples en 0 y $2K(k)$, polos simples en $i \cdot K'(k)$ y $2K(k) + iK'(k)$ y periodos $4K(k)$ e $i2K'(k)$.

Tomando $\tau = i\frac{2}{\pi}K'(k)$ se tiene que $\frac{\Psi(z)}{sn(z;k)}$ es elíptica y entera, por lo tanto constante. Así,

$$sn(z;k) = p \cdot \frac{\theta_4\left(\frac{z}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)}{\theta_4\left(\frac{z-iK'(k)}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)} \frac{\theta_4\left(\frac{z-2K(k)}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)}{\theta_4\left(\frac{z-(2K(k)+iK'(k))}{4K(k)}\pi + z_o; q\right)} \quad \text{para algún } p \in \mathbb{C}.$$

De este ejemplo vemos que podemos escribir la función $sn(z;k)$ en términos de la función \mathcal{THETA}

8.3. Función \mathcal{P} de Weierstrass

En el ejemplo anterior escribimos la función $sn(z;k)$ en términos de la función \mathcal{THETA} . Veamos si podemos escribir a la función \mathcal{P} de Weierstrass en términos de la función \mathcal{THETA} .

La función \mathcal{P} de Weierstrass dada por

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}-\{0\} \times \mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{[z-(n+im)]^2} - \frac{1}{[n+im]^2}$$

es meromorfa con polos dobles en $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, elíptica con periodos i , 1 y solución de la ecuación diferencial

$$[\mathcal{P}'(z)]^2 = 4[\mathcal{P}(z)]^3 - g_2 \cdot \mathcal{P}(z) - g_3$$

$$g_2 = 60 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}-\{0\} \times \mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{(n+im)^4}$$

$$g_3 = 140 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}-\{0\} \times \mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{(n+im)^6}$$

Consideremos el cuadrado Q con vértices en: $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ y $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. Si no hay ceros en ∂Q entonces $\mathcal{P}(z) = 0$ tiene dos soluciones en el interior de Q .

Observaciones

(I) $\mathcal{P}(z)$ es una función par y $\mathcal{P}'(z)$ es una función impar

(II) Sean e_1 , e_2 y e_3 raíces del polinomio $w^3 - \frac{g_2}{4}w - \frac{g_3}{4}$, entonces

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right) = e_1, \quad \mathcal{P}\left(\frac{i}{2}\right) = e_2, \quad \mathcal{P}\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = e_3.$$

(III) $g_3 = 0$

Demostración.

(I) Claro

(II) Si $z_j \in \mathbb{C}$ es tal que $\mathcal{P}(z_j) = e_j$ entonces por (17), $\mathcal{P}'(z_j) = 0$ De (I) $\mathcal{P}'(\frac{1}{2}) = -\mathcal{P}'(-\frac{1}{2}) = -\mathcal{P}'(-\frac{1}{2} + 1) = -\mathcal{P}'(\frac{1}{2})$, entonces

$$\mathcal{P}'(\frac{1}{2}) = 0$$

Análogamente

$$\mathcal{P}'(\frac{i}{2}) = 0 = \mathcal{P}'(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})$$

Combinando este último resultado con (17) tenemos que para $c \in \{\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\}$

$$[\mathcal{P}(c)]^3 - \frac{g_2}{4} \cdot \mathcal{P}(c) - \frac{g_3}{4} = 0$$

Es decir,

$$\mathcal{P}(c) \text{ es raíz del polinomio } w^3 - \frac{g_2}{4}w - \frac{g_3}{4}$$

Por definición de e_1 , e_2 y e_3 se tiene el resultado.

(III) De (II)

$$w^3 - \frac{g_2}{4}w - \frac{g_3}{4} = (w - \mathcal{P}(\frac{1}{2}))(w - \mathcal{P}(\frac{i}{2}))(w - \mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})).$$

Igualando coeficientes se tienen las siguientes relaciones

$$a) \mathcal{P}(\frac{1}{2}) + \mathcal{P}(\frac{i}{2}) + \mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) = 0$$

$$b) \mathcal{P}(\frac{1}{2})\mathcal{P}(\frac{i}{2}) + \mathcal{P}(\frac{1}{2})\mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) + \mathcal{P}(\frac{i}{2})\mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) = -\frac{g_2}{4}$$

$$c) \mathcal{P}(\frac{1}{2})\mathcal{P}(\frac{i}{2})\mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) = \frac{g_3}{4}$$

Desarrollando a) obtenemos

$$0 = \mathcal{P}(\frac{1}{2}) + \mathcal{P}(\frac{i}{2}) + \mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})$$

$$= \left[4 + \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{[(n-\frac{1}{2})+im]^2} - \frac{1}{[n+im]^2} \right] +$$

$$+ \left[-4 - \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{[(m-\frac{1}{2})-in]^2} - \frac{1}{[m-in]^2} \right] + \mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})$$

Por lo tanto

$$\mathcal{P}(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) = 0$$

Sustituyendo en c) obtenemos

$$g_3 = 0$$

Tomemos como cuadrado fundamental Q el cuadrado con vértices en:

$$\frac{3}{4} + i\frac{3}{4}, -\frac{1}{4} + i\frac{3}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}, \frac{3}{4} - \frac{i}{4}$$

en donde 0 y $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ forman un *conjunto irreducible* de ceros y polos, ambos dobles.

Por lo cual, tomando $\tau = \frac{i}{\pi}$

$$\mathcal{P}(z) = \alpha \cdot \left[\frac{\theta_4(\pi(z - [\frac{1}{2} + \frac{i}{2}]) + z_0)}{\theta_4(\pi z + z_0)} \right]^2, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Ya vimos que podemos expresar las funciones elípticas de *Jacobi* en términos de la función *THETA*. También la función \mathcal{P} de Weierstrass.

¿Podremos expresar las funciones elípticas en términos de la función \mathcal{P} de Weierstrass?

Sea f una función elíptica de grado 2 que cumple las siguientes condiciones:

- a) Periodos 1 e i
- b) Ceros a_1 y a_2
- c) Polos en b_1 y b_2 ambos distintos de cero
- d) f es par.
- e) $a_1 + a_2$ y $b_1 + b_2$ no son periodos

Entonces f' es impar, por lo cual

$$f'(\frac{1}{2}) = f'(\frac{i}{2}) = f'(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) = 0.$$

Los ceros a_1 y a_2 son distintos ya que si fueran el mismo sería un cero de f' . Más aun

$$\{a_1, a_2\} \cap \{\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\} = \phi$$

Por lo tanto $f'(a_i) \neq 0$ para $i \in \{1, 2\}$. Entonces

$$[\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_1)] \quad \text{y} \quad [\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_2)]$$

tienen cero simple en $z = a_1$ y $z = a_2$ respectivamente.

Análogamente se tiene que

$$\{b_1, b_2\} \cap \{\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\} = \phi$$

ya que si fuera distinto del vacío subiría el grado de la función. Entonces

$$[\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_1)] \quad \text{y} \quad [\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_2)]$$

tienen cero simple en $z = b_1$ y $z = b_2$ respectivamente.

Por lo tanto

$$f(z) = \beta \cdot \frac{[\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_1)] \cdot [\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_2)]}{[\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_1)] \cdot [\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_2)]}, \quad \beta \in \mathbb{C} \quad (20)$$

En el caso general, se considera

$$f(z) = \frac{1}{2} [f(z) + f(-z)] + \frac{1}{2} \frac{f(z) - f(-z)}{\mathcal{P}'(z)} \mathcal{P}'(z).$$

Por lo tanto las funciones $\mathcal{P}(z)$ y $\mathcal{P}'(z)$ son base para el espacio de *funciones elípticas* con periodos 1 e i .

Ésto se generaliza a periodos $2w_1$ y $2w_2$, de la serie (2) que define a la función \mathcal{P} cambiando $z - (n + im)$ por $z - (n2w_1 + m2w_2)$. Ver [WW]

Apéndice A

Korteweg-de Vries

El descubrimiento de las ondas solitarias en aguas poco profundas lo hizo el ingeniero inglés Scott Russell, en el Canal de Edinburgo a Glasgow en el año de 1834. Sus observaciones las reportó a la British Association for the Advancement of Science en 1844. A la estructura bien definida y localizada, objeto de ese reporte, la bautizó como "la gran onda de traslación". A continuación citamos un párrafo.

"Observaba el movimiento de un bote jalado por dos caballos en una parte angosta del Canal, cuando el bote se detuvo súbitamente, no así la masa de agua que se había puesto en movimiento. Ésta se acumuló alrededor de la proa del bote y se movió hacia adelante con la forma de una larga elevación solitaria. La seguí a caballo. La elevación de agua, que era de unos 10 metros de largo y 50 centímetros de alto, continuó su curso por el canal, aparentemente sin cambio de forma o disminución en su velocidad, que era de unos 15 kilómetros por hora. Su altura disminuyó después de tres kilómetros."

Russel realizó experimentos en su laboratorio, generando ondas solitarias al dejar caer un objeto pesado en un extremo de un estanque angosto.

Dedujo empíricamente que el volumen de agua en la onda es igual al volumen desplazado y que la velocidad de la onda solitaria es: $c^2 = g(h + a)$, g es la aceleración debida a la gravedad, a es la amplitud de la onda y h es la profundidad en reposo.

Para fundamentar estos resultados, Boussinesq (1871) y Rayleigh (1876) supusieron que la longitud de la onda es mucho mayor que la profundidad. A partir de las ecuaciones de movimiento para un fluido no viscoso e incompresible, dedujeron la fórmula de Russell para la velocidad. También encontraron que el perfil de la superficie del agua es:

$$\xi(x, t) = a \cdot \operatorname{sech}^2 [b(x - ct)] , \text{ con } b^{-2} = \frac{1}{3a} 4h^2(h + a), \text{ en el caso } \frac{a}{h} \ll 1.$$

La contribución de Korteweg y de Vries en 1895 fue la deducción de la ecuación de movimiento para la superficie.

A continuación presentamos una deducción de la ecuación de Korteweg y de Vries a partir de las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible, en el caso $h \ll 1$.

Consideremos un elemento de volumen V encerrado por $S \equiv \partial V$.

$\chi(x_1, x_2, x_3)$ y t denotan la posición y el tiempo. \vec{u} , ρ y p denotan la velocidad, densidad y presión del fluido, respectivamente.

\vec{n} es la normal unitaria a S .

La masa de fluido contenida en V al tiempo t es:

$$m(t) = \iiint_{\Omega} \rho(\chi, t) d\chi$$

Como la región V no cambia en el tiempo, la tasa de cambio de la masa con respecto al tiempo es

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\chi$$

La ley de conservación de masa garantiza que el cambio en la masa se debe únicamente al flujo neto de masa a través de la frontera, es decir,

$$\frac{dm}{dt} = - \iint_S \rho(\vec{u}, \vec{n}) d\sigma$$

Del Teorema de la divergencia se sigue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

en la región ocupada por el fluido, ya que su integral sobre cualquier parte de esa región es cero.

De manera análoga se obtiene la ecuación de balance para el momento lineal. La densidad de momento en la i -ésima dirección es ρu_i . El cambio en el momento viene de tres factores: el flujo neto de momento a través de la frontera, las fuerzas superficiales y las fuerzas volumétricas. En nuestro caso, éstas últimas son debido a la gravedad y actúan en la dirección vertical. La ecuación de balance de momento es:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} d\chi = - \iint_S \rho u_i(\vec{u}, \vec{n}) d\sigma + \iint_S p n_i d\sigma + \iiint_{\Omega} \rho F_i d\chi$$

Procediendo como antes obtenemos las ecuaciones

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \vec{u}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho F_i = 0$$

En el caso del agua la densidad es constante, por lo cual la ecuación de conservación de masa es

$$\text{div}(\vec{u}) = 0$$

Las ecuaciones de conservación de momento son

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i$$

para $i = 1, 2, 3$. O en forma vectorial

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \vec{k}$$

Tomando rotacional en la ecuación de momento obtenemos para $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ una ecuación diferencial parcial lineal de primer orden que garantiza que $\vec{w}(\chi, t) \equiv 0$ para $t > 0$ si esta condición se cumple para $t = 0$. En este caso hay un potencial de velocidades ϕ de tal forma que $\vec{u} = \nabla \phi$. La ecuación de conservación de masa es ahora la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades: $\Delta \phi = 0$.

Usando que $u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} u \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)^2$, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho} p + g x_3 \right) = 0$$

Como podemos absorber cualquier función de t en el potencial, se sigue que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho} (p - p_o) + g x_3 = 0$$

Esta ecuación determina a la presión una vez que conocemos el potencial de velocidades. Para determinar el potencial necesitamos condiciones de frontera. En la superficie del fondo se debe tener que la componente normal de la velocidad sea cero, es decir $\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = (x_1, x_2, 0, t) = 0$ para (x_1, x_2) en la región que forma la base del volumen ocupado por el fluido y para todo $t > 0$.

En la superficie libre tenemos dos condiciones acopladas: la velocidad normal de la superficie debe coincidir con la velocidad normal del fluido y la presión en el agua debe coincidir con la presión en el aire.

La superficie libre es de la forma $\Gamma(t) = \{\chi : f(\chi, t) = 0\}$.

Si $\Gamma(t + \Delta t)$ se ha separado de $\Gamma(t)$ una distancia Δs en χ_o en la dirección normal, es decir, $f(\chi_o, t) = 0$ y $f(\chi_o + \Delta s \vec{n}, t + \Delta t) = 0$, entonces

$$f(\chi_o + \Delta s \vec{n}, t + \Delta t) - f(\chi_o, t + \Delta t) + f(\chi_o, t + \Delta t) - f(\chi_o, t) = 0$$

Usando el Teorema del Valor Medio, dividiendo por Δt y tomando el límite cuando esta cantidad tiende a 0 obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Por otra parte, la componente normal de la velocidad es

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla \phi \nabla f$$

Por lo tanto, $\nabla \phi \nabla f = -\frac{\partial f}{\partial t}$.

Supondremos que no hay rompimiento de olas y por lo tanto la superficie libre es la gráfica de una función de x_1, x_2 y t , es decir

$$f(\chi, t) = x_3 - \eta(x_1, x_2, t) - h$$

Usando la identidad del párrafo anterior encontramos la ecuación para la superficie del agua:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

Ahora usamos que los cambios en la presión del aire son pequeños para tomar $p = p_o$ en la superficie $x_3 = h + \eta(x_1, x_2, t)$, lo cual da

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0$$

La región ocupada por el fluido es $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_3 \leq h + \eta(x_1, x_2, t)\}$ y el problema completo es (A^{**})

- i) $\Delta \phi = 0$ en $0 < x_3 < h + \eta(x_1, x_2, t)$
- ii) $\frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$
- iii) $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0$ en $x_3 = h + \eta(x_1, x_2, t)$
- iv) $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$ en $x_3 = h + \eta(x_1, x_2, t)$

con ϕ y η como incógnitas. En particular, la forma que adopta la superficie del agua se debe obtener como parte de la solución por lo cual (A^{**}) es un problema de frontera libre.

Supondremos que el estanque o canal es angosto y largo para ignorar la dependencia en x_2 y considerar $x_1 \in [0, \infty)$. Finalmente, usamos las variables x, z en lugar de x_1, x_3 .

Usando las longitudes características: a, l y h que son la amplitud, longitud de onda y la profundidad en reposo, definimos variables adimensionales

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\gamma}, \quad \phi^* = \frac{\phi}{\beta}$$

con $\gamma = \frac{l}{\sqrt{gh}}$, $\beta = a \cdot l \sqrt{\frac{g}{h}}$

La superficie libre es $z^* = 1 + \alpha \eta^*$ con $\alpha = \frac{a}{h}$

Quitando asteriscos a las nuevas variables, (A^{**}) se convierte en (A^*)

- (i) $\phi_{zz} = 0$ en $0 < z < 1 + \alpha \eta(x, t)$, $x > 0$
- (ii) $\phi_z(x, 0, t) = 0$ para $t \geq 0$
- (iii) $\eta + \phi_t + \frac{\alpha}{2} (\phi_x^2 + \delta^{-2} \phi_z^2) = 0$ en $z = 1 + \alpha \eta(x, t)$
- (iv) $\phi_z = \delta^2 (\eta_t + \alpha \phi_x \eta_x)$ en $z = 1 + \alpha \eta(x, t)$

donde $\delta = \frac{h}{l}$. Nos interesa el régimen de poca profundidad ($h \ll 1$), amplitud pequeña ($a \ll 1$), onda larga ($l \gg 1$), así que $\alpha \ll 1$, $\delta \ll 1$. Tomamos $\delta^2 = O(\alpha)$, reescalamos y usamos una coordenada espacial que se mueve con velocidad 1, es decir, $\xi = \frac{\sqrt{\alpha}}{\delta}(x - t)$, $\tau = \frac{\alpha^{3/2}}{\delta}t$, $\Phi = \frac{\sqrt{\alpha}}{\delta}\phi$ para obtener (A)

- i) $\Phi_{zz} + \alpha\Phi_{\xi\xi} = 0$ en $0 < z < 1 + \alpha\eta(\xi, \tau)$
- ii) $\Phi_z(\xi, 0, \tau) = 0$ para $\tau \geq 0$
- iii) $\eta + \Phi_\xi + \alpha\Phi_\tau + \frac{1}{2}(\Phi_z^2 + \alpha\phi_\xi^2) = 0$ en $z = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau)$
- iv) $\Phi_z = \alpha(-\eta_\xi + \alpha\eta_z + \alpha\Phi_\xi\eta_\xi)$ en $z = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau)$

Suponemos expansiones de la forma

$$\begin{aligned}\Phi(\xi, z, \tau) &= \Phi_o(\xi, z, \tau) + \alpha\Phi_1(\xi, z, \tau) + O(\alpha^2) \\ \eta(\xi, \tau) &= \eta_o(\xi, \tau) + \alpha\eta_1(\xi, \tau) + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

A orden α^0 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial z^2} &= 0 \text{ en } 0 < z < 1 + \alpha\eta(\xi, \tau) \\ \frac{\partial \Phi_o}{\partial z}(\xi, 0, \tau) &= 0\end{aligned}$$

por lo cual $\Phi_o(\xi, z, \tau)$ no depende de z , es decir $\Phi_o = \theta_o(\xi, \tau)$. Además,

$$\eta_o(\xi, \tau) = \frac{\partial \Phi_o}{\partial \xi} \text{ en } z = 1$$

Por lo tanto

$$\eta_o(\xi, \tau) = \frac{\partial \theta_o}{\partial \xi}(\xi, \tau)$$

A orden α^1 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(\xi, 0, \tau) &= 0\end{aligned}$$

por lo cual

$$\Phi(\xi, z, \tau) = -\frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) + c(\xi, \tau)z + b(\xi, \tau)$$

Usando la condición de frontera en $z = 0$ obtenemos

$$\Phi_1(\xi, z, \tau) = \theta_1(\xi, \tau) - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial \xi^2}(\xi, \tau)$$

De la primera condición de frontera en $z = 1$ obtenemos

$$\eta_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

y de la segunda se obtiene una relación de consistencia.

A orden α^2 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(\xi, 0, \tau) &= 0\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\Phi_2(\xi, z, \tau) = \theta_2(\xi, \tau) - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) + \frac{z^4}{24} \frac{\partial^4 \theta_o}{\partial \xi^4}$$

Pero $\Sigma := \left\{ \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial \tau}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}, \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \eta_j}{\partial \tau} \right\}$ tienen segundas derivadas continuas por lo que toda $f \in \Sigma$ tiene la siguiente expansión:

$$f(\xi, 1 + \alpha\eta, \tau) = f(\xi, 1, \tau) + \alpha\eta \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, 1, \tau) + O(\alpha^2)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \eta_o = -\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \theta_o}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial \xi^2} \eta_o = -\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_o}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \frac{\partial \eta_o}{\partial \xi} \quad (2)$$

Integramos (9) con respecto a ξ , usando (8) y $\eta_o = \frac{\partial \theta_o}{\partial \xi}$ para obtener

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = -\eta_1 + \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2$$

así que

$$\eta_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2$$

Es decir,

$$2 \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 = 0$$

Derivando con respecto a ξ obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial \eta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta_o}{\partial \xi^3} + \frac{3}{2} \eta_o \frac{\partial \eta_o}{\partial \xi} = 0$$

Reescalando las variables $\tau = 6t$, $x = \xi$, $u = \frac{3}{2} \eta_o$, obtenemos la ecuación de Korteweg y de Vries

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (3)$$

Bibliografía

[AB] Gert Almkvist, Bruce Berndt. Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses, π , and the Ladies Diary. American Mathematical Monthly 1988. No. August-September. Pp585-608.

[Ca] Max Caspar. Kepler. Dover Publications, 1993.

[Co] John B. Conway. Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1978.

[CJ] Richard Courant, Fritz John. Introduction to Calculus and Analysis, Volume 1. Springer, 1998.

[Fl] Gilberto Flores. Ondas viajeras en modelos físicos y biológicos. XVI Escuela Venezolana de Matemáticas. 2003.

[K] Morris Klein. Calculus: An Intuitive and Physical Approach. Dover Publications, 1998.

[WW] E.T. Whittaker, G.N. Watson. A Course of Modern Analysis. Cambridge Mathematical Library, 1996.