CAPÍTULO 1

Mediciones e Incertidumbres

1.1. Importancia de la medición

La medición ha jugado un papel esencial en la actividad del hombre a lo largo de la historia. El corte de un bloque de piedra para construir una pirámide o un templo Maya, la predicción de un eclipse para la inauguración de una ceremonia religiosa, el conteo de células de la sangre y la determinación de la forma de la Tierra vista desde un satélite artificial en órbita, son una pequeñísima muestra de casos en los cuales la medición ha sido y es utilizada con el fin de satisfacer una necesidad humana.

Independientemente de nuestro nivel de educación, en algún momento de nuestra vida nos enfrentaremos a una situación en la cual tendremos que expresar un juicio sobre la información de un acontecimiento o hecho que nos atañe directa o indirectamente como miembros de la sociedad. Como personas responsables, nuestras propias decisiones deben basarse en una evaluación de la confiabilidad de la información que se nos proporciona. Nuestra decisión de consumir una marca particular de harina para hacer tortillas puede depender de la evaluación que hagamos de la exactitud de los valores del contenido especificado en el empaque; la elección de un nuevo automóvil, del consumo de combustible que se le atribuye. Todos por igual, científicos o profanos, nos enfrentamos diariamente con el requisito de estar entrenados para aceptar como verdadera una información o mostrarnos igualmente escépticos con respecto a su confiabilidad.

1.2. La medición: Medición directa e indirecta

Desde el momento en que se descubrió que existía la posibilidad de analizar y describir la naturaleza en forma matemática, el conocimiento científico de la humanidad ha aumentado considerablemente. Cuando los hallazgos de la investigación científica se expresan en términos matemáticos, pierden su ambigüedad y se les puede verificar y refutar por medio de experimentos.

En la descripción física cuantitativa de la naturaleza la medición juega un papel importante. **La medición es el proceso mediante el cual cuantificamos nuestra experiencia del mundo exterior**. Teniendo un conocimiento adecuado de la naturaleza del proceso de medición estamos en posibilidades de alcanzar un nivel satisfactorio de competencia para decidir, a través de la experimentación, la validez de una ley científica.

La realización de un experimento casi siempre implica la necesidad de ejecutar mediciones a fin de obtener e interpretar resultados. La medición puede realizarse de forma directa o indirecta según sea el caso.

Medición directa

Una medición directa es aquella que realizamos utilizando un instrumento diseñado, construido y calibrado para cuantificar apropiadamente la cantidad que nos interesa. El valor de la medida se obtiene a partir de una escala o una pantalla asociada al instrumento de medición.

Algunos instrumentos permiten realizar la medición comparando dos magnitudes de la misma especie. Dicha comparación implica contar cuantas unidades del instrumento de medición "caben" en la magnitud a medir. Por ejemplo, el tamaño del lado mayor de un escritorio, lo determinamos comparando el tamaño de una varilla de metal o de madera usada como patrón o unidad. Ambas magnitudes cuantifican una misma cantidad: la longitud.

Dependiendo de las circunstancias, la elección del patrón en la práctica puede ser arbitraria. En el trabajo científico sin embargo, la necesidad de comunicar resultados experimentales de manera precisa y general exige que las unidades de los patrones de medida estén bien definidas. La necesidad de dar cumplimiento a este requisito dio origen al Sistema Internacional de Unidades (SI). Dicho sistema ha sido adoptado oficialmente en Honduras[1] y por tanto debemos propiciar su uso.

Otros instrumentos no operan la medición comparando dos magnitudes de la misma especie sino que su calibración está hecha de tal forma que sea posible medir la magnitud de una cantidad a través de la magnitud de otra cantidad. Un termómetro de mercurio por ejemplo, mide directamente la temperatura de un objeto aunque ella se determine por la longitud de la columna del líquido dentro del contenedor de vidrio.

[1] Decreto numero 39, emitido por la Asamblea Nacional Constituyente el 11 de mayo de 1895 y publicado en "La Gaceta" No. 1188 del 1o. de junio de ese mismo año.

Medición indirecta

Una medición directa del volumen de un cilindro se puede efectuar introduciendo dicho objeto dentro de un líquido contenido en una probeta. Su valor se obtiene leyendo la escala pintada en las paredes del recipiente y tomando en consideración el cambio de nivel experimentado por la superficie libre del fluido cuando el cilindro es introducido en él. No obstante, dicha medición la podemos realizar también si medimos la longitud h del cilindro, su diámetro d y calculamos su volumen mediante la relación,

$$V=\frac{\pi}{4}hd^2$$

Este proceso de medida se conoce como *medición indirecta* lo cual definimos así: **Una medición indirecta es aquella en la cual la magnitud a medir en realidad se calcula mediante una relación matemática.**

Es posible encontrar múltiples casos en los cuales la medición indirecta es efectuada tomando en consideración solamente medidas obtenidas de forma directa, pero en general no debe ser motivo de desconcierto si se nos presentan relaciones matemáticas que involucran simultáneamente magnitudes medidas unas de forma directa y otras de forma indirecta.

1.3. Valor Central e Incertidumbre Absoluta

Cualquiera que sea la forma de medir, directa o indirecta, la medición debe ser una acción planificada y atenta. No obstante, por mucho que nos esforcemos para realizar una medición cuidadosa, la medida no puede aceptarse como un verdad absoluta sino como una información que contiene cierto grado de incertidumbre.

Para aclarar este punto recordemos, en primer lugar, que generalmente toda medida es el resultado de una operación humana en la cual se ven implicados nuestros sentidos, y como éstos no se desarrollaron especialmente para realizar esta tarea lo más probable es que durante el proceso de medición incurramos en equivocaciones.

En segundo lugar, nuestros instrumentos no son perfectos. Podrán parecernos muy bien acabados pero una evaluación estricta y detallada seguramente mostrará que tienen defectos tanto de construcción como de funcionamiento. Los mismos pueden ser notorios en muchos de aquellos casos en los cuales el instrumento de medición debe hacer contacto con el objeto que se está estudiando; esta interacción generalmente alterará el tamaño de la cantidad a medir.

En tercer lugar, los límites de la cantidad a medir no podrían estar bien definidos en cuyo caso una medida exacta no tiene sentido, además de ser imposible. Un ejemplo de ello es la pretensión de medir el espesor de la capa de ozono de la Tierra ¿Donde comienza y termina exactamente la capa de ozono?.

Para salvar estas dificultades, lo que presentamos entonces como la medida, es un intervalo de valores donde confiamos se encuentra el valor real de la cantidad que se pretende medir. Dentro de este intervalo de valores, hay uno que proponemos como el más representativo de la medida por ser el que tiene mayor probabilidad de acercarse al valor real. A este valor le llamamos el **valor central de la medida** y es por tanto el que recomendamos para ser usado en cualquier cálculo posterior.

Incertidumbre absoluta

Alrededor del valor central, hay **una cantidad que determina los límites del intervalo de valores donde confiamos está el valor real de la medida**. A esta cantidad le llamamos **incertidumbre absoluta de la medida (o error absoluto)** y su valor es usado frecuentemente para establecer la precisión de la medida y en cálculos separados de incertidumbres.

En consecuencia, la manera de representar matemáticamente el resultado de cualquier medición es expresándolo de la forma siguiente:

$$X=\langle X\rangle\pm\Delta X \qquad \textbf{(1)}$$

donde $\langle X\rangle$ es el valor central de la medida y ΔX la incertidumbre absoluta. Esta forma de expresar el resultado de una medición tal como se presenta en la ecuación (1) , se le conoce como forma de error absoluto, porque la incertidumbre absoluta tiene las mismas unidades que el valor central.

Ejemplo 1

Al usar una cinta métrica para medir la altura de una señorita, se observa que es no menos de 166 cm y no más de 168 cm. Enuncie el resultado de esta medición en la forma: valor central ± incertidumbre absoluta.

Solución

Como el valor central estará localizado a la mitad del intervalo, su valor debe ser 167 cm y el error absoluto debe ser 1 cm. Por tanto, la altura H de la señorita podemos expresarla como,

$$\boxed{H=(167\pm1)cm}$$

1.4. Precisión de una medida: Incertidumbre Porcentual

Existe alguna tendencia en considerar a la incertidumbre absoluta como un indicativo directo de la precisión de la medida. Esto es rebatido muy frecuentemente. Los argumentos que se esgrimen en contra de esta idea tienen como base hechos como los siguientes. Si una medida de una longitud resulta ser de 10 mm con una incertidumbre absoluta de 1mm, la medida no luce muy precisa porque el ancho del intervalo de incertidumbre (2 mm) es solamente cinco veces menor que el valor central. Sin embargo, si esta misma incertidumbre se asocia a una medida de 100 mm, el tamaño del intervalo de incertidumbre es cincuenta veces menor que el valor central. Esto indica mayor precisión en la medida puesto que la incertidumbre absoluta resulta relativamente pequeña si la comparamos con el valor central.

Lo anterior nos sugiere que la precisión de una medida debemos establecerla a partir de la información que nos brinde la relación que existe entre el valor de su incertidumbre absoluta y su valor central. Definimos entonces la *incertidumbre relativa* de la medida escogiendo la cantidad siguiente: **La incertidumbre relativa de una medida es la incertidumbre absoluta expresada como una fracción del valor central.** Matemáticamente,

$$I_r = \frac{\Delta X}{<X>} \qquad (2)$$

Si expresamos en palabras la relación anterior diríamos que **la incertidumbre relativa de una medida es numéricamente igual al cociente de la incertidumbre absoluta y el valor central; dicha relación no tiene unidades.**

En general, esta forma de expresar la incertidumbre de una medida tiene el inconveniente de que la incertidumbre relativa es una cantidad muy pequeña; por este motivo se acostumbra dar opcionalmente la incertidumbre porcentual la cual se define como: **incertidumbre porcentual o error porcentual (I_p) de una medida es la incertidumbre relativa multiplicada por cien.** Esto es,

$$I_p = \frac{\Delta X}{<X>}100 \qquad (3)$$

Una vez establecida la incertidumbre relativa o la incertidumbre porcentual de una medida estamos en capacidad de comparar su precisión con la de otras. Los términos precisión e incertidumbre porcentual son complementarios, es decir, cuanto más baja es la incertidumbre porcentual de una medida más alta es su precisión. Los siguientes ejemplos ilustrarán la forma de establecer la precisión de una medida y la importancia que esta cantidad tiene para comparar la calidad de las medidas.

Ejemplo 2

El resultado experimental de la medida de la masa de una muestra de plomo fue: m=(216.3±0.5)g. Determine la incertidumbre relativa y porcentual de la medida.

Solución

En este caso, la incertidumbre está dada en forma absoluta porque ella tiene las mismas unidades que el valor central. Esto es, Δm=0.5g. Si ahora queremos determinar la incertidumbre relativa de esta medida, debemos escribir:

$$\frac{\Delta m}{<m>} = \frac{0.5g}{216.3g} = 0.002$$

Y la incertidumbre porcentual,

$$I_p = \frac{\Delta m}{<m>}100 = (0.002)(100) = 0.2\%$$

Lo anterior significa que la masa de la muestra de plomo se obtuvo con una precisión de 0.2% o que la incertidumbre porcentual fue 0.2.

Ejemplo 3

En la tabla 1 se listan los resultados de medir longitudes utilizando diferentes instrumentos. Establezca cuál de las medidas tiene mayor precisión.

TABLA 1

INSTRUMENTO	*VALOR CENTRAL (cm)*	*INCERTIDUMBRE ABSOLUTA (cm)*
Regla métrica	*2.0*	*0.1*
Cinta métrica	*300.0*	*0.3*
Pie de rey	*0.750*	*0.003*
Micrómetro	*0.2500*	*0.0005*

Solución

La incertidumbre porcentual de cada medida la calculamos de la manera siguiente:

Regla métrica $\frac{0.1}{2}(100) = 5\%$

Cinta métrica $\frac{0.3}{300}(100) = 0.1\%$

Pie de Rey $\frac{0.003}{0.750}(100) = 0.4\%$

Micrómetro $\frac{0.0005}{0.2500}(100) = 0.2\%$

De acuerdo a los resultados obtenidos mediante los cálculos anteriores, la medida realizada con la cinta métrica es la que presenta menor incertidumbre porcentual. Esto equivale a decir que, para este caso particular, dicha medida es más precisa que las realizadas con los otros instrumentos. Por tanto, el hecho que la incertidumbre absoluta de las medidas realizadas con un micrómetro sean muy pequeñas comparadas con las obtenidas mediante el uso de otros instrumentos (regla o cinta métrica) no implica necesariamente que las medidas efectuadas con dicho instrumento sean más precisas que las logradas con aquellos.

Queremos llamar la atención, aunque suponemos que ya se habrá notado que por brevedad se suele llamar error a la incertidumbre, sea ésta absoluta, relativa o porcentual; pero recuerde que este "error" no se debe a una equivocación sino justamente a la incertidumbre inherente a la medición. También se debe tener presente que error absoluto, relativo y porcentual de una medida son términos que expresan diferentes formas de presentar su incertidumbre.

1.5. Incertidumbre Instrumental e Incertidumbre dada por el investigador.

Con no poca frecuencia, los instrumentos de medición condicionan la incertidumbre de una medida. Sin embargo, la calidad de un instrumento no necesariamente garantiza una buena calidad en una medida. El ejemplo 3 ilustra claramente esta idea; la mínima división en la escala de la regla métrica es 100 veces mayor que la del micrómetro y, sin embargo, con ambos instrumentos, se puede obtener en muchos casos medidas con precisión similar. Por supuesto, la situación puede ser distinta de un caso a otro; indiscutiblemente, la regla métrica queda en una posición desventajosa frente al micrómetro si se trata de medir, por ejemplo, el espesor de una tarjeta de crédito.

En la práctica, pueden lograrse divisiones muy finas en la escala de un instrumento de medición, pero esto no significa que si se continúa con el proceso de subdividir la escala, la incertidumbre absoluta se reducirá a cero. Además de la figura de la escala; la agudeza visual de quien mide, el proceso de medición y las condiciones de iluminación, son factores adicionales de los cuales dependerá la medida.

Por tanto no pueden existir reglas estrictas para determinar la localización y el tamaño del intervalo que representará la medida. Sin embargo, con el propósito de intercambiar información experimental de manera general y precisa tratamos de lograr un acuerdo para comunicar la medida de una cantidad obtenida en una sola medición con un instrumento cualquiera.

Consideremos un caso ficticio en el cual un instrumento de medición de longitudes presenta una situación como la mostrada en la fig. 1.1. Es probable que tres personas diferentes reporten valores distintos de la lectura de la medida; algo así como 7.56, 7.57, y 7,58 cm. ¿Cuál de las tres personas reporta el valor correcto? Es difícil establecerlo. Si se nos preguntara sobre el mismo asunto, quizá reportaríamos un valor numérico diferente a los reportados anteriormente. En ciencia no puede existir tal ambigüedad. Es necesario que exista una forma que permita que el resultado de una medición cualquiera sea el mismo independientemente de quien lo reporte.

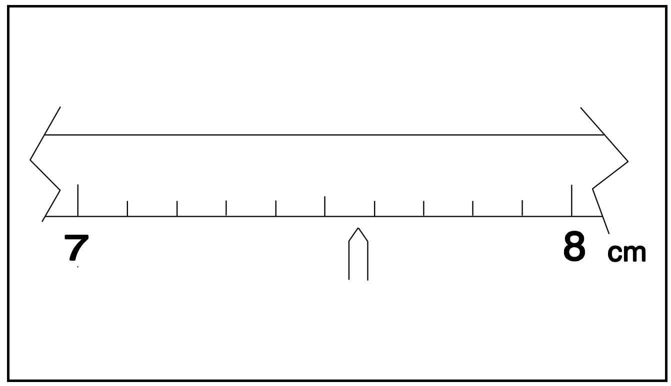

Figura 1.1. Porción de la escala de un instrumento que muestra el resultado de una medición.

Al observar nuevamente la fig. 1.1., todos estaremos de acuerdo de que el valor real de la medida está entre 7.5 y 7.6 cm, lo cual se puede expresar también como (7.55±0.05) cm y tendríamos un valor central y una incertidumbre absoluta. Sin embargo, según esta línea de razonamiento, 7.55 cm sería también el valor central aunque el puntero estuviera más cerca de 7.5 cm que de 7.6 cm ¿No sería incorrecto reportar esto como el resultado de la medición? Claro que sí. De esta manera negaríamos la esencia misma del proceso de medición que trata de representar lo más fiel posible la medida de lo que cuantificamos.

Por otro lado, el valor 7.55 cm podría interpretarse como que la medida fue lograda con un instrumento graduado en centésimas de centímetro y eso no es cierto (ver fig.1.1.). Debe haber una forma de indicar también cuál es la calibración del instrumento de medición.

Para resolver esta situación proponemos lo siguiente: al hacer una sola medición directa de una cantidad cuyo resultado se reportará a otras personas, debemos dar como valor central de la medida aquél que se obtiene tomando en cuenta la marca más próxima de la escala del instrumento de medición y aplicar redondeo cuando el puntero indicador esté ubicado a la mitad de dos marcas consecutivas. **La incertidumbre instrumental será la mitad de la mínima división de la escala del instrumento.**

Para el caso de la Figura 1.1., tomando en cuenta el hecho que el puntero está ubicado más cerca de 7.6 cm que de 7.5 cm, el resultado debe expresarse como:

$$L=(7.6\pm0.05)cm$$

De esta forma indicamos que el instrumento utilizado para efectuar la medición estaba graduado en milímetros y solamente se ha efectuado una medición.

Lo que resulta al final de la disertación es muy importante y es un hecho que en muchas situaciones experimentales este concepto proporciona una salida decorosa ante la necesidad de comunicar resultados. Sin embargo, insistimos en que cuando hagamos mediciones e informemos resultados debemos tener siempre en cuenta este punto clave y fundamental: las medidas no son simples números exactos, sino que consisten en intervalos, dentro de los cuales confiamos se encuentra el valor esperado. Tan importante es el valor central como la incertidumbre absoluta de la medida; y entre más pequeña es ésta en relación a aquél, más confiable es la medida. Por ello, la simplificación propuesta para determinar la incertidumbre instrumental no puede aplicarse a cualquier situación; una escala con divisiones muy finas que se use para medir una cantidad con límites mal definidos puede dar un intervalo de medición más grande que varias de las divisiones más pequeñas, y un objeto bien definido estudiado bajo buenas condiciones visuales puede permitir la identificación de una incertidumbre absoluta mucho menor que la mitad de la mínima división de la escala. Para casos como estos, es el **criterio del investigador** el que debe prevalecer a la hora de reportar la incertidumbre de la medida.

En la práctica, cada situación particular debe evaluarse en forma individual y obviamente, en la medida de lo posible, el instrumento seleccionado para la realización de la medición debe tener las características apropiadas para medir la propiedad que se desea cuantificar.

Ejemplo 4

¿Cuál es la incertidumbre absoluta que debe proporcionarse al medir la longitud de una carretera utilizando el odómetro de un automóvil?

Solución

Por lo general, los odómetros de los automóviles que están calibrados en kilómetros, subdividen esta magnitud en diez partes. Esto implica que la mínima división de la escala es 1/10 de kilómetro. Por tanto, la mitad de la mínima división de la escala, esto es, la incertidumbre absoluta instrumental, es 1/20 de kilómetro o 0.05 kilómetros (50 m).

1.6. Cifras Significativas

Antes de continuar avanzando, es necesario que analicemos aquí algunos hechos y definamos el concepto de cifras significativas.

Seguramente habrá notado que la mayoría de los resultados de mediciones presentadas hasta ahora se expresan de forma tal que el valor central de la medida tiene el mismo número de dígitos después del punto decimal que el de la incertidumbre absoluta. Dicho de otra manera, el número de dígitos después del punto decimal que se le asigna a la incertidumbre absoluta de una medida, condiciona el número de dígitos después del punto decimal en el valor central de la medida. Por razones particulares, esta norma no se cumple estrictamente cuando la medida está expresada en función de una incertidumbre instrumental. En lo que sigue trataremos de explicar estos hechos.

Se nos informa que un premio de L. 100.00 (CIEN LEMPIRAS) será compartido en partes iguales por los tres miembros del grupo ganador de un concurso. Un cálculo efectuado con una calculadora de bolsillo indica que a cada miembro del grupo le corresponde una fracción equivalente a L. 33.333333. De toda esta fila de treces, solo cuatro son significativos; los dos primeros y los dos que siguen inmediatamente al punto decimal. Esto se debe a que existe un límite práctico razonable que impide entregarle a cada miembro su premio con fracciones más allá de las centésimas de Lempira porque la subdivisión mínima de esta unidad monetaria es una centésima (1/100).

Tratándose de medidas, se producen situaciones similares a la anterior. Si se nos dice que la masa de un trozo de hilo se ha medido directamente con una balanza calibrada a la milésima de gramo y nos reportan como valor central <m>=0.04802g, inmediatamente nos damos cuenta que nos reportan más cifras de las que son realmente significativas. Dado que en la escala se puede apreciar nada más hasta la milésima de gramo, el valor central de la medida debe expresarse como <m>=0.048g. Esta expresión tiene como cifras significativas los dígitos 4 y 8. Los ceros a la izquierda no son cifras significativas, excepto en los casos en que haya al menos un dígito diferente de cero que los anteceda.

Cuando usamos una cinta métrica, graduada en milímetros, para medir directamente la longitud de una mesa cuyos bordes están bien definidos y reportamos como valor central <*l*>=154 cm, estamos actuando incorrectamente. Esta expresión tiene menos cifras significativas de las que realmente se pueden obtener en la medición de esta cantidad utilizando dicho instrumento. Si la longitud de la mesa coincide exactamente con la marca del instrumento indicada con el numero 154, o está más próxima de la misma que de otra, el valor central de la medida debemos expresarla como <*l*>=154.0 cm.

> **Cifra significativa es cualquier dígito, en una expresión numérica que es imprescindible para denotar la magnitud de una cantidad proporcionando además información sobre una realidad concreta.**

En los resultados de la actividad experimental docente, la incertidumbre absoluta de una medida realizada indirectamente se expresará con una cifra significativa. De aquí obtendremos el criterio para establecer las cifras significativas del valor central. Éste tendrá el mismo número de dígitos después del punto decimal que el número de dígitos tenga, también después del punto decimal, la incertidumbre absoluta.

Ejemplo 5

Determine el número de cifras significativas en las siguientes expresiones: a) 50.0 cm, b) 5.938 s, 4.06X10^3 m/s, d) 0.0023 m.

Solución

a) En la expresión 50.0 cm, las tres cifras son significativas porque nos dicen cuantas decenas de centímetro (5), cuantos centímetros (0) y cuántos milímetros (0) tenemos.

b) En la expresión 5.938 s, no hay duda que tenemos cuatro cifras significativas.

c) Matemáticamente, 4.06X10^3 m/s, es equivalente a 4060 m/s, pero esto no quiere decir que la expresión tenga cuatro cifras significativas. Expresada como se presenta indica que solamente los tres dígitos 4,0,6 son cifras significativas; la otra cifra (0) es dudosa.

d) La expresión 0.0023m la leemos como veintitrés diez milésimas. Es decir, la magnitud de la cantidad, o sea el número que la representa, es 23; así que esta expresión tiene solamente dos cifras significativas.

Ejemplo 6

Las magnitudes de ciertas cantidades han sido medidas de manera indirecta, de tal forma que los valores centrales e incertidumbres absolutas son respectivamente: a) 0.003912/ °C, 0.00056/ °C; b) 904.7786842 cm^3, 271.4336053 cm^3.

Exprese los resultados de cada medida con el número correcto de cifras significativas.

Solución

a) Del enunciado del problema podemos deducir que el valor central de la medida debemos obtenerlo del número 0.003912/ °C y la incertidumbre absoluta a partir de 0.00056/ °C. Para expresar la incertidumbre absoluta de esta medida con una cifra significativa, tenemos que redondear el número 0.00056 a 0.0006. Esto nos indica que el valor central debe expresarse entonces solamente con cuatro dígitos después del punto decimal, es decir, como 0.0039.

Por tanto, el resultado de la medida es:

(0.0039±0.0006) / °C   ó   (39±6)X10^{-4} / °C

b) Para lograr expresar este resultado con el número correcto de cifras significativas usaremos un pequeño artificio; expresaremos los números dados en notación exponencial de la manera siguiente:

904.7786842 → 0.9047786842X10^3
271.4336053 → 0.2714336053X10^3

De esta manera visualizamos más claramente que la incertidumbre absoluta expresada con una cifra significativa adquiere la forma de 0.3X10^3 cm^3 (ya redondeada). La cual nos indica que el valor central debemos cortarlo en 0.9 (un dígito después del punto decimal) y expresarlo como 0.9X10^3 cm.

La expresión final de la medida la presentamos como:

(9±3)X10^2 cm^3

1.7. Valor Central e Incertidumbre Absoluta en medidas aleatorias

En la práctica se presentan muchas situaciones en las cuales la medición reiterada de una magnitud conducirá a resultados claramente diferentes. Esta fluctuación puede ser inherente al objeto de estudio o provenir de nuestras dificultades para efectuar la medición. Consideremos a manera de ejemplo los casos siguientes:

a) **Irregularidades en la cantidad a medir**. Un objeto que no tiene una forma geométrica definida se quiere idealizar como una esfera con el propósito de determinar su volumen. Como el objeto no presentará un único diámetro, habrá que realizar varias medidas, cambiando la orientación del sólido respecto al instrumento de medición y de esa manera obtendremos una colección de medidas.

b) **La imperfección del instrumento de medición**. Si colocamos un trozo de madera sobre puntos diferentes de la superficie del platillo de una balanza de pesas móviles, probablemente obtendremos lecturas ligeramente diferentes de la masa del objeto. Al usar diferentes balanzas, pero del mismo modelo, puede obtenerse también una colección de valores distintos de la masa del objeto.

Cualquiera que sea el origen de las fluctuaciones en las medidas, debemos prepararnos para hacer afirmaciones sensatas basadas en la información obtenida, la cual podría consistir en cientos de medidas. El caso es tan especial, que antes de lanzarnos a elaborar una respuesta a la necesidad de conocer el resultado de las mediciones, es más apropiado plantearse: ¿Cuál es la pregunta?. La medición del consumo diario de energía en una fábrica, ¿se usará para establecer los días de mayor consumo y diseñar una estrategia de ahorro de energía, o se usará para establecer el precio de venta del artículo que se produce? Una encuesta de opinión pública, ¿Se usará para establecer cuál candidato a la presidencia tiene más seguidores al momento o se pretende pronosticar el resultado de las próximas elecciones? Según sea la pregunta, así será elaborada la respuesta.

Dependiendo de la aplicación que queramos darle a la información contenida en la medida, escogemos uno de los valores posibles para designarle la caracterización del grupo de medidas. Estos valores pueden ser: *la moda, la mediana, o la media*. No discutiremos aquí el significado de la moda y la mediana por quedar fuera del alcance de los objetivos de este texto. Para nuestros propósitos, la media nos resulta útil y por tanto, le daremos un trato especial.

Valor central como media aritmética

Hemos visto que una magnitud X determinada experimentalmente debe constar de un valor representativo o central <X> y un intervalo de incertidumbre ΔX, de tal forma que X=<X>±ΔX. **Para una serie de medidas, el valor representativo o central que propondremos es el valor promedio o media aritmética, el cual es el valor obtenido al sumar todas las medidas y dividir ese resultado por el número N de todas ellas**. Esto es,

$$<X>=\frac{X_1+X_2+X_3+...+X_N}{N} \qquad (4)$$

Y de manera más compacta,

$$<X>=\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \qquad (5)$$

Incertidumbre absoluta como el promedio de las desviaciones absolutas

Ahora que hemos establecido la manera de seleccionar y calcular el valor central de las medidas fluctuantes, es necesario establecer la amplitud del intervalo de medidas que lo contiene a fin de asociarle al resultado un grado de confianza. Cuanto más amplio sea el intervalo de valores que acompañan el valor central, menor será la importancia que le podemos asignar. Por otra parte, cuanto más estrecho sea el intervalo de valores, tanto más autorizados nos sentiremos a confiar en el valor central.

Al igual que el valor central, el intervalo de incertidumbre ΔX se puede calcular de varias formas y debido a eso, generalmente no es único. Formulemos, pues, una cantidad que convenga a nuestros propósitos docentes y a la cual llamaremos **desviación absoluta media y la definimos como el promedio de las desviaciones absolutas de cada medida con respecto al valor central**. La expresión matemática para esta cantidad es la siguiente:

$$\Delta X=\frac{|<X>-X_1|+|<X>-X_2|+...+|<X>-X_N|}{N}$$

Y de manera más compacta,

$$\Delta X=\frac{\sum_{i=1}^{N} |<X>-X_i|}{N} \qquad (6)$$

Ejemplo 7

El diámetro de un objeto cilíndrico de madera fue medido en diferentes partes del sólido obteniendo los resultados siguientes: 4.65, 4.99, 4.70, 5.00 y 4,86 cm. Determine su valor promedio con su respectiva incertidumbre absoluta y exprese el resultado con el número correcto de cifras significativas.

Solución

El número N de datos es 5. Calcularemos el valor promedio del diámetro D calculando individualmente los términos de la ecuación. (5) usando la nomenclatura correspondiente.

$$\sum_{i=1}^{5} D_i = \mathbf{4.65+4.99+4.70+5.00+4.86=24.2cm}$$

$$<D>=\frac{\sum_{i=1}^{5} D_i}{5}=\frac{24.2cm}{5}=4.84cm$$

Similarmente, la incertidumbre absoluta del diámetro la calculamos de la manera siguiente:

$$\sum_{i=1}^{5} |<D>-D_i| = \mathbf{/4.84\text{-}4.65/+/4.84\text{-}4.99/+/4.84\text{-}4.70/+}$$

$$\mathbf{/4.84\text{-}5.00/+/4.84\text{-}4.86/=0.66cm}$$

$$\Delta D=\frac{\sum_{i=1}^{5} |<D>-D_i|}{5}=\frac{0.66cm}{5}=0.132cm$$

La incertidumbre absoluta del diámetro expresada con una cifra significativa queda como ΔD=0.1cm. Como ella tiene solo un dígito después del punto decimal, el valor central del diámetro debe tener también solo un dígito después del punto decimal. Por tanto, el resultado que presentamos es,

$$D=(4.8\pm0.1)cm$$

Este resultado nos muestra un caso interesante. A pesar de que cada diámetro fue medido con un instrumento que permitía medir hasta la centésima de centímetro, las variaciones mismas de la magnitud de la cantidad medida, y no la precisión del instrumento, fue la limitante para que el valor del diámetro se midiera nada más a la décima de centímetro.

CAPÍTULO 2

Propagación de errores

2.1. Propagación de incertidumbres en medidas indirectas

Al determinar indirectamente la magnitud de una cantidad, involucramos mediante una relación matemática medidas a las cuales se les asocia su respectiva incertidumbre absoluta. Es lógico pensar que la magnitud de la cantidad calculada tenga también su propia incertidumbre, producto de las incertidumbres de las medidas originales. **El hecho de que las incertidumbres de las medidas originales se transfieran a cualquier medida indirecta que las involucre es conocido como propagación de incertidumbres.**

Máximo incertidumbre posible

El fundamento básico de la teoría de propagación de incertidumbres establece que cualquier medida indirecta debería expresarse proporcionando el máximo intervalo de incertidumbre posible que se puede obtener combinando las incertidumbres de las medidas originales involucradas. **La incertidumbre máxima posible esperada (o incertidumbre absoluta) será la mitad de la diferencia del valor máximo y mínimo de la medida obtenida indirectamente.** Si representamos por **q** la cantidad calculada, lo anterior lo podemos expresar matemáticamente de la forma siguiente:

$$\Delta q = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{2} \tag{7}$$

Donde **Δq** es el valor máximo posible de **la incertidumbre esperada,** **q** y $\mathbf{q_{max}}$, $\mathbf{q_{min}}$ sus valores máximo y mínimo respectivamente.

Ejemplo 8

El volumen de un cilindro hueco puede calcularse mediante la expresión siguiente:

$$V = \frac{\pi}{4} h(D^2 - d^2) \tag{8}$$

Si h, D y d se han medido de tal forma que,

h=(12.1±0.3)cm
D=(5.3±0.6)cm
d=(2.8±0.1)cm

Calcule el volumen del cilindro así como su incertidumbre absoluta y exprese el resultado con el número correcto de cifras significativas.

Solución

El valor central del volumen lo calculamos con los valores centrales de h, D y d.

$$\langle V \rangle = \frac{\pi}{4}\,\boldsymbol{(12.1cm)[(5.3cm)^2\text{-}(2.8cm)^2]=192.442185cm^3}$$

El valor máximo del volumen lo calculamos sustituyendo en la ec. (8) los valores máximos de h y D, y el valor mínimo de d. Esto es,

$$V_{\max} = \frac{\pi}{4}\,\boldsymbol{(12.4cm)[(5.9cm)^2\text{-}(2.7cm)^2] =268.0155525cm^3}$$

En cambio, el valor mínimo del volumen lo calculamos sustituyendo en la misma ecuación los valores mínimos de h y D, y el valor máximo de d. Esto es,

$$V_{\min} = \frac{\pi}{4}\,\mathbf{(11.8cm)[(4.7cm)^2\text{-}(2.9cm)^2]=126.7821131cm^3}$$

Por tanto, la incertidumbre absoluta está dada por,

$$\Delta V = \frac{(268.015552 - 126.782113)cm^3}{2} = 70.6167197 cm^3$$

Expresando este resultado con una cifra significativa tenemos,

$$\Delta V = 7X10^1 cm^3$$

y el resultado final,

$$\boxed{V = (19 \pm 7) X10^1 cm^3}$$

Ejemplo 9

El coeficiente de fricción estática entre dos superficies está dado por, $\mu=\tan\theta$ *donde el valor del ángulo medido es* θ*=(38.3±0.3) °. Calcule el coeficiente de fricción estática entre estas dos superficies.*

Solución

El valor central del coeficiente de fricción estática lo calculamos como,

$$<\mu>=\tan(38.3°)=0.7897524124$$

y sus valores máximo y mínimo como,

$$\mu_{max}=\tan(38.6°)=0.7982895122$$

$$\mu_{min}=\tan(38.0°)=0.7812856265$$

Por tanto, la incertidumbre absoluta del coeficiente de fricción estática es,

$$\Delta\mu=\frac{0.7982895122-0.7812856265}{2}=0.008501942845$$

Al expresar la incertidumbre absoluta del coeficiente de fricción estática con una cifra significativa, es decir, redondeando a la milésima, observamos que el valor central sólo puede tener tres dígitos después del punto decimal. De aquí, el resultado es,

$$\boxed{\mu=(0.790\pm0.009)}$$

Ejemplo 10

Calcúlese la constante elástica de un resorte helicoidal cilíndrico y escriba el resultado con el número correcto de cifras significativas, partiendo de los siguientes datos:

Diámetro del alambre del resorte
d=(0.089±0.0005) cm
Diámetro medio del resorte
D=(1.11 ±0.005) cm
Módulo de elasticidad del material del alambre
G=(79± 3)X10^4 *kg/cm*^{2}
Número de vueltas o espiras
n=(115±1)

Solución

La constante elástica de un resorte helicoidal cilíndrico está dada aproximadamente por,

$$k=\frac{Gd^4}{8nD^3} \qquad \textit{(9)}$$

El valor central de la constante es,

$$<k>=\frac{(79X10^4 kg/cm^2)(0.089cm)^4}{8(115)(1.11cm)^3}=0.039394\frac{kg}{cm}$$

El valor máximo de la constante elástica del resorte se obtiene haciendo máximo el numerador y mínimo el denominador en la ec. (9). Esto es,

$$K_{max}=\frac{(82X10^4 kg/cm^2)(0.0895cm)^4}{8(114)(1.105cm)^3}=0.0427586831\frac{kg}{cm}$$

En cambio, el valor mínimo de la constante elástica del resorte se obtiene haciendo mínimo el numerador y máximo el denominador. Por tanto,

$$K_{min}=\frac{(76X10^4 kg/cm^2)(0.0885cm)^4}{8(116)(1.115cm)^3}=0.03624216195\frac{kg}{cm}$$

La incertidumbre absoluta de la constante elástica es,

$$\Delta k=\frac{(0.04275868-0.03624216)\frac{kg}{cm}}{2}=0.00325826\frac{kg}{cm}$$

Esto nos conduce a expresar el resultado con tres dígitos después del punto decimal, es decir,

$$k=(0.039\pm0.003)\frac{kg}{cm} \quad \textit{ó} \quad \boxed{k=(39\pm3)X10^{-3}\frac{kg}{cm}}$$

Después de haber seguido el desarrollo de los ejemplos anteriores seguramente se habrá dado cuenta que el uso de la ec. (7) para calcular la incertidumbre absoluta de una medida indirecta requiere combinar apropiadamente las incertidumbres de las medidas involucradas. La clave para hacer la combinación correcta está en no perder de vista de que lo que hay que obtener primero son los valores máximo y mínimo posibles con la información que se tiene a mano (medidas originales y la ecuación con que se efectuará el cálculo del valor de la medida). Esto es fácil de controlar porque los valores mínimo y máximo estarán por debajo y por arriba, respectivamente, del valor central calculado de la medida indirecta.

Dado que no existen reglas generales que se apliquen a todos los casos, el estudiante tendrá que analizar cada caso particular y hacer la combinación de las incertidumbres de las medidas originales buscando siempre encontrar el máximo valor posible de la medida así como el mínimo valor posible.

2.2. Propagación de incertidumbres en casos especiales

Aplicando el concepto de máxima incertidumbre posible, es fácil deducir unas reglas sencillas que permiten calcular el mayor inetervalo posible esperado para ciertos casos especiales [1]. De acuerdo a dichas reglas, si q es una cantidad que se calcula por la suma o diferencia de dos medidas *x,y,* de tal manera que $q=x+y$ o $q=x-y$, la mayor incertidumbre absoluta posible Δq esperada en ambos casos será la suma de las incertidumbres individuales de x e y. Esto es,

$$\Delta q=\Delta x+\Delta y \qquad (10)$$

Por otro lado, si q esta dada por una expresión que contiene a la vez sólo productos y cocientes, es decir, del tipo

$$q=\frac{kx^{a}y^{b}}{z^{c}} \qquad (11)$$

donde k es una constante, entonces, la incertidumbre relativa $\Delta q/<q>$ está dada por,

$$\frac{\Delta q}{<q>}=a\frac{\Delta x}{<x>}+b\frac{\Delta y}{<y>}+c\frac{\Delta z}{<z>} \qquad (12)$$

La ecuación anterior establece que la incertidumbre relativa de una cantidad calculada por medio de productos y/o cocientes, es la suma de la incertidumbre relativa de cada cantidad involucrada multiplicandola antes por su respectivo exponente. Cada término del miembro de la derecha es la contribución individual de cada variable a la incertidumbre relativa (o porcentual) de la cantidad calculada.

La incertidumbre absoluta Δq se puede obtener de la ecuación anterior expresándola de la forma siguiente:

$$\Delta q=<q>[a\frac{\Delta x}{<x>}+b\frac{\Delta y}{<y>}+c\frac{\Delta z}{<z>}] \qquad (13)$$

En general, para cualquier función diferenciable, se puede obtener una expresión que permita calcular de manera aproximada la incertidumbre absoluta de la cantidad que se pretende calcular. Sin embargo, ello se obtiene utilizando técnicas de cálculo diferencial, lo cual escapa a los objetivos de este texto. No obstante, cualquier función puede tratarse aplicando el concepto fundamental de la propagación de incertidumbres, es decir, el concepto de máxima incertidumbre posible.

Ejemplo 11

La resistencia equivalente R_e de un circuito en serie que consta de dos resistores con resistencias R_1 y R_2, puede calcularse con la ecuación siguiente:

$$R_e=R_1+R_2$$

Si $R_1=(100\pm5)k\Omega$ y $R_2=(22\pm2)k\Omega$, calcule el valor de R_e y su incertidumbre absoluta.

Solución

Utilizando la ecuación correspondiente, $R_e=(100k\Omega+22k\Omega)=122k\Omega$. Puesto que se trata de una suma, la incertidumbre de la resistencia calculada será la suma de las incertidumbres de las resistencias involucradas. Es decir, $\Delta R_e=(5k\Omega+2k\Omega)=7k\Omega$. La expresión final del resultado es,

$$\boxed{R_e=(122\pm7)k\Omega}$$

Ejemplo 12

Calcule la incertidumbre absoluta en la constante elástica del resorte helicoidal cilíndrico del ejemplo 10 aplicando los conceptos involucrados en la ec. (13).

Solución

De acuerdo a las ec. (9) y (13), la incertidumbre absoluta de la constante elástica del resorte se puede expresar como,

$$\Delta k=<k>[\frac{\Delta G}{<G>}+4\frac{\Delta d}{<d>}+3\frac{\Delta D}{<D>}]$$

Utilizando el resultado del ejemplo 10 para la constante *elástica del resorte, su incertidumbre absoluta la calculamos de la manera siguiente:*

$$\Delta k = 0.039394\frac{kg}{cm}\left[\frac{3}{79} + 4\left(\frac{0.0005}{0.089}\right) + 3\left(\frac{0.005}{1.11}\right)\right]$$

$$\Delta k = 0.039394\frac{kg}{cm}[0.0379746 + 0.0224719 + 0.0135135]$$

$$\Delta k = 0.002913584462\frac{kg}{cm}$$

$$\boxed{\Delta k = 0.003\frac{kg}{cm}}$$

Obsérvese que el valor de la incertidumbre absoluta es el mismo que el calculado por otro medio en el ejemplo 10.

Obsérvese también que el número 8 no fue tomado en cuenta en el cálculo de Δk. Esto sucederá con cualquier constante que aparezca en una ecuación compuesta por productos y cocientes y se debe a que estos valores se conocen exactamente.

Los términos que se suman dentro de los corchetes en la penúltima ecuación, proporcionan individualmente sus contribuciones a la incertidumbre porcentual total de la constante elástica del resorte. Las cantidades *G, d* y *D* contribuyen con incertidumbres de 3.8%, 2.2% y 1.4% respectivamente. Está claro que el aporte mayor a la incertidumbre lo introduce el módulo de elasticidad *G*. A fin de reducir la incertidumbre absoluta en la medición de la constante elástica del resorte, habría que comenzar midiendo con mayor precisión el módulo de elasticidad del material del cual está hecho el alambre del resorte. Luego fijar la atención en la medición del diámetro del alambre y por último considerar una mejor medida para el diámetro medio del resorte.

CAPÍTULO 3

Ajuste de datos experimentales

3 .1. Ecuaciones empíricas representando datos experimentales

La experimentación genera frecuentemente situaciones en las cuales el experimentador tendrá que hacer análisis cualitativos y cuantitativos del comportamiento de una cantidad que guarda alguna relación con otra. Un ejemplo concreto es el cambio de longitud de un resorte helicoidal cilíndrico de espiras juntas como función de la carga aplicada (ver figura 3.1).

CUADRO 3.1
Datos experimentales del comportamiento elástico de un resorte helicoidal cilíndrico de espiras juntas.

Masa m (kg)	Elongación x(cm)	Masa m (kg)	Elongación x(cm)	Masa m (kg)	Elongación x(cm)
0.050	0.0	0.110	0.1	0.500	6.1
0.060	0.0	0.130	0.2	0.700	11.5
0.070	0.0	0.150	0.2	0.900	17.1
0.080	0.1	0.200	0.4	1.100	22.5
0.090	0.1	0.300	1.2	1.600	36.4
0.100	0.1	0.400	3.4		

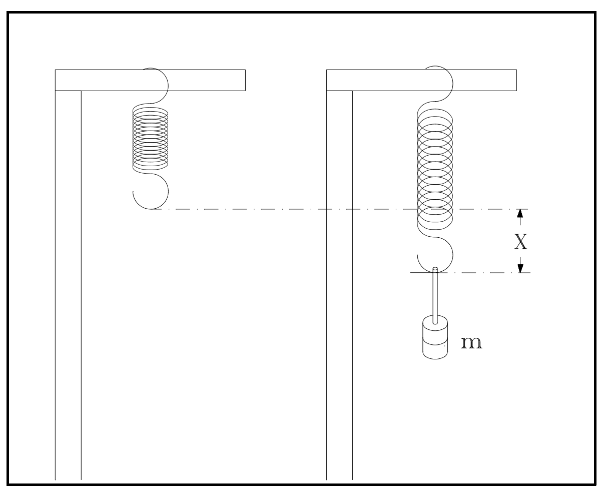

Figura 3.1. Resorte estirado bajo la acción de la carga m.

El proceso de análisis de los datos experimentales inicia comúnmente con la elaboración de una tabla que resuma en forma ordenada las medidas hechas a las variables de interés. Pero como se puede observar en el Cuadro 3.1, es relativamente poca la información que se puede extraer de los datos numéricos mediante una inspección de los mismos.

La situación cambia notablemente cuando los datos experimentales se grafican como parejas ordenadas en un sistema de referencia ortogonal. En la gráfica de la figura 3-2, claramente se observa que el conjunto de puntos contenidos en el intervalo A,B, siguen una secuencia representada por una curva, mientras que los puntos dentro del intervalo B,C, se ordenan aproximadamente sobre un línea recta.

Durante la etapa del análisis cuantitativo de los datos experimentales resulta conveniente hacer una representación matemática de los mismos. Dicha representación se logra cuando se obtiene una ecuación que describe satisfactoriamente el comportamiento de las variables involucradas. Esta expresión se conoce como **ecuación empírica** debido a que no es portadora de información concerniente a las propiedades internas del sistema y porque generalmente se obtiene partiendo de las observaciones numéricas recolectadas durante la realización del experimento. En virtud de las incertidumbres experimentales asociadas a las medidas, la representación propuesta reproducirá los datos experimentales originales solamente en forma aproximada

Con la finalidad de determinar la ecuación empírica que mejor represente a los datos experimentales, el aspecto de la gráfica de los mismos juega un papel importante. Es decir, la forma en que se distribuyen los puntos en la gráfica sirve de fundamento para suponer relaciones entre las variables consideradas.

La secuencia que siguen los puntos podría sugerirnos en algunos casos, que una función lineal los representaría adecuadamente. En otros casos, los puntos parecen acomodarse más a una linea curva que a una recta. Si este es el caso, la función que ha de representarlos podría ser de tipo polinomial, exponencial, logarítmica, etc.

Una vez seleccionada la función más prometedora, la tarea que sigue consiste en determinar la magnitud de cada una de las constantes asociadas. Afortunadamente, existen técnicas matemáticas que nos permiten realizar esos cálculos a fin de obtener la ecuación lineal, o de otro tipo, que mejor se ajuste a los datos experimentales.

Un procedimiento de uso generalizado se apoya en el método de mínimos cuadrados. Cuando este método se aplica a datos experimentales que siguen una secuencia de linea recta se le llama regresión lineal. La regresión cuadrática se aplica a puntos que se sospecha se acomodan siguiendo una linea dada por una parábola. Los aspectos operativos básicos de las regresiones lineal y cuadrática serán tratados en seguida.

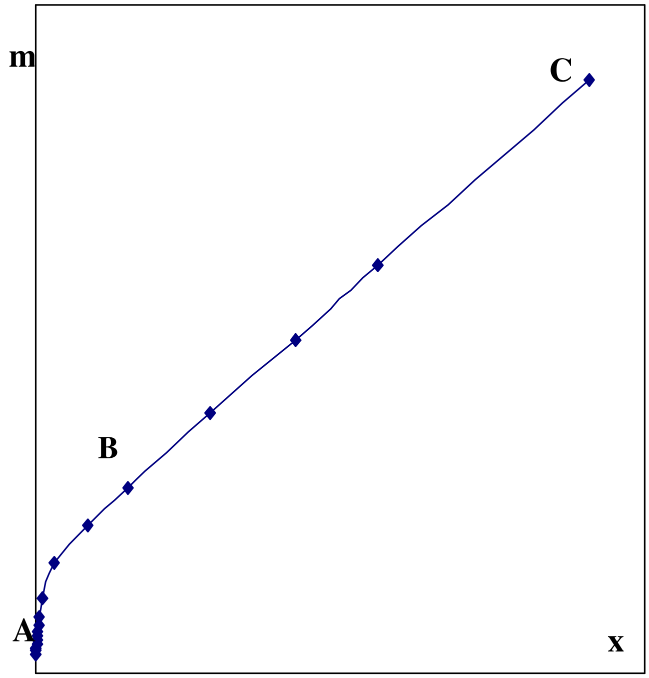

Figura 3.2

Regresión lineal

La ecuación general de una línea recta es,

$$Y = mx + b \qquad (14)$$

Las constantes m y b son las que habría que determinar si se pretende ajustar los datos experimentales a una ecuación de línea recta. Sus valores se calculan con las ecuaciones siguientes:

$$m = \frac{N\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \qquad (15)$$

$$b = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \qquad (16)$$

donde N es el número total de puntos (parejas ordenadas) obtenidos experimentalmente.

La incertidumbre de las constantes m y b se pueden calcular con las ecuaciones siguientes:

$$\Delta m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}} \qquad (17)$$

$$\Delta b = S_y \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}} \qquad (18)$$

La cantidad S_y se calcula con la ecuación,

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum [f(x_i) - Y_i]^2}{N-2}} \qquad (19)$$

tomando en cuenta que $f(x)$=mx+b.

Regresión cuadrática

Si los datos experimentales se han de ajustar a una ecuación cuadrática del tipo,

$$y(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 \qquad (20)$$

las constantes b_o, b_1 y b_2, se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones lineales formado con sumatorias de los datos experimentales, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma y} &= \mathbf{N b_o + b_1 \Sigma x + b_2 \Sigma x^2} \\ \mathbf{\Sigma yx} &= \mathbf{b_o \Sigma x + b_1 \Sigma x^2 + b_2 \Sigma x^3} \\ \mathbf{\Sigma yx^2} &= \mathbf{b_o \Sigma x^2 + b_1 \Sigma x^3 + b_2 \Sigma x^4} \end{aligned} \qquad (21)$$

donde por razones de claridad no se han escrito los subíndices de las variables dentro de las sumatorias.

Ejemplo 10

a) Encuentre la ecuación lineal de la resistencia en función de la temperatura que mejor representa los datos experimentales registrados en la tabla 3.2 y cuya gráfica es la figura 3.3.

b) Use los datos y los resultados del inciso anterior para calcular la incertidumbre absoluta de la pendiente y del intercepto. Escriba el resultado de cada una de estas constantes con el número correcto de cifras significativas.

Tabla 3.2. Datos experimentales de la variación de la resistencia eléctrica con la temperatura de una muestra de alambre de cobre calibre 30.

T (°C)	R (Ω)	T (°C)	R (Ω)	T (°C)	R (Ω)
27	76	50	84	75	91
30	78	55	85	80	93
35	80	60	87	85	94
40	81	65	88	90	96
45	83	70	90	95	97

Solución

a) Si los datos experimentales se ajustarán a una línea recta, la ecuación general se puede escribir de la forma siguiente:

$$R = mT + b$$

donde R es la resistencia para cualquier temperatura T. Comenzaremos desarrollando los términos de las ecuaciones (15) y (16) de la manera siguiente:

$$\sum T_i = 27 + 30 + 35 + 40 + 45 + 50 + 55 + 60 + 65 + ... + 95 = 902$$

$$\sum R_i = 76 + 78 + 80 + 81 + 83 + 84 + 85 + 87 + ... + 97 = 1303$$

$$\sum T_i R_i = 27(76) + 30(78) + 35(80) + 40(81) + ... + 95(97)$$

$$= 80392$$

$$\sum T_i^2 = 27^2 + 30^2 + 35^2 + 40^2 + 45^2 + ... + 95^2 = 61104$$

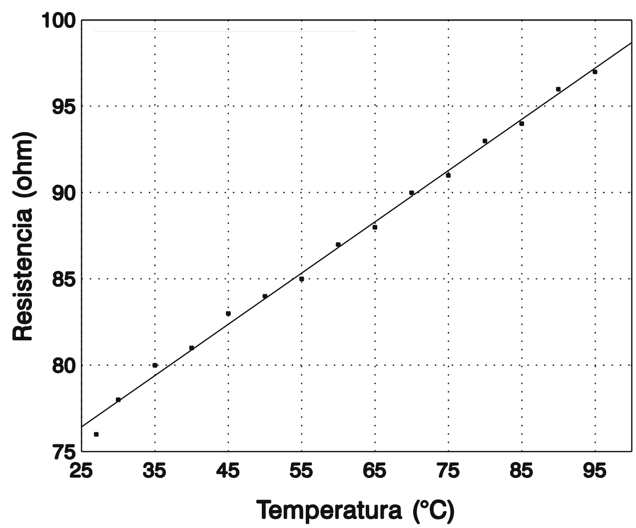

Figura 3.3. Gráfica de la resistencia de una muestra de alambre de cobre en función de la temperatura.

Haciendo uso de los resultados anteriores calculamos la pendiente m y el intercepto b como:

$$m = \frac{15(80392) - (902)(1303)}{15(61104) - (902)^2} = 0.2969618089$$

$$b = \frac{(61104)(1303) - (902)(80392)}{15(61104) - (902)^2} = 69.00936322$$

y escribimos el resultado de la forma siguiente:

$$\boxed{R = 0.2969618089T + 69.00936322 \quad \Omega}$$

b) *Para calcular las incertidumbres absolutas de m y b primero debemos calcular el valor de* S_y. *Los términos* $f(T_i)$ *los calculamos así:*

$$f(T_1)=0.2969618089(27)+69.00936322=77.02733206$$
$$f(T_2)=0.2969618089(30)+69.00936322=77.91821749$$
$$\vdots$$
$$f(T_{15})=0.2969618089(95)+69.00936322=97.22073507$$

Al completar los cálculos para los $f(T_i)$ *podemos calcular* S_y *como sigue:*

$$S_y=\sqrt{\frac{[77.02733206-76]^2+[77.91821749-76]^2+...}{15-2}}$$

$$S_y=0.4337649951$$

de donde,

$$\Delta m=0.4337649951\sqrt{\frac{15}{15(61104)-(902)^2}}=0.005235694531$$

$$\Delta b=0.4337649951\sqrt{\frac{61104}{15(61104)-(902)^2}}=0.3341669473$$

Por tanto, expresando nuestro resultado con el número correcto de cifras significativas tenemos,

$$\boxed{m=(0.297\pm0.005)\quad \Omega/^\circ C} \quad y \quad \boxed{b=(69.0\pm0.3)\quad \Omega}$$

Obsérvese que aunque los datos de la tabla 3.2 están escritos con dos cifras significativas, el hecho de haber tomado 15 puntos experimentales nos permitió mejorar la precisión de los resultados, los cuales están dados con tres cifras significativas. La línea continua de la figura 3.3 fue trazada con la función f(T) evaluada para distintos valores de T.

Ejemplo 14

Partiendo de la información contenida en la gráfica de la figura 3.4 encuentre la mejor ecuación cuadrática que represente debidamente los datos graficados.

Solución

*En función de las variables **x** y **t** la ecuación general queda expresada como,*

$$x=b_o+b_1t+b_2t^2$$

Tomando los puntos experimentales (N=10) a partir de la gráfica de la figura 3.4, calcularemos las sumatorias necesarias para formar el sistema de ecuaciones lineales (21). Para ello operamos de la manera siguiente:

$$\Sigma t=1+2+3+4+...+10=55$$
$$\Sigma t^2=1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$$
$$\Sigma t^3=1^3+2^3+3^3+...+10^3=3025$$
$$\Sigma t^4=1^4+2^4+3^4+...+10^4=25333$$

$$\Sigma x= 8.5+26.3+50.8+83.9+...+450.5 = 1815.4$$
$$\Sigma xt=8.5(1)+26.3(2)+50.8(3)+...+450.5(10)=14030.2$$
$$\Sigma xt^2 = 8.5(1)^2+26.3(2)^2+...+450.5(10)^2 = 116500$$

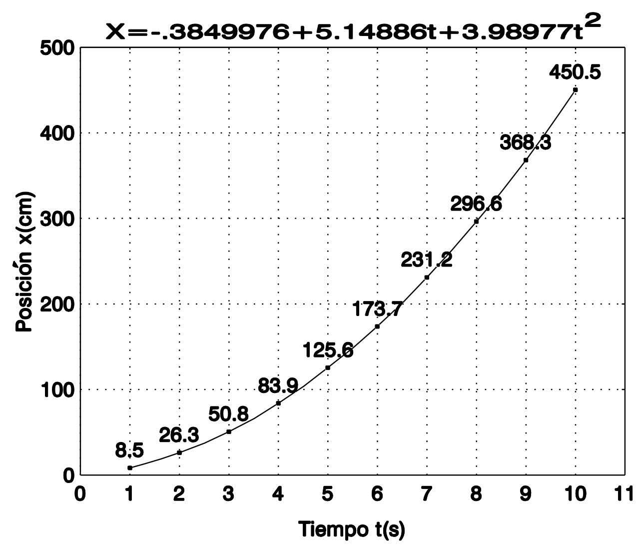

Figura 3.4. Gráfica de la posición de un objeto en función del tiempo transcurrido.

El sistema correspondiente de ecuaciones lineales queda como,

$$1815.4 = 10b_o + 55b_1 + 385b_2$$
$$14030.2 = 55b_o + 385b_1 + 3025b_2$$
$$116500 = 385b_o + 3025b_1 + 25333b_2$$

El anterior sistema de ecuaciones lineales puede resolverse usando cualquier método válido como ser: igualación, eliminación, determinantes, etc., obteniéndose los valores siguientes para las constantes b_o, b_1 *y* b_2.

$$b_o = -0.3849976$$

$$b_1 = 5.14886$$

$$b_2 = 3.98977$$

La ecuación final aparece escrita en la parte superior de la gráfica de la figura 3.4. Obsérvese que las constantes se reportan con tantas cifras como puede proporcionar la calculadora usada para determinarlas. Escrita así, la ecuación permite reproducir con bastante aproximación los datos experimentales originales y para trazar la curva continua que *se observa en dicha figura. Puede usarse además para predecir la posición del objeto en instantes (tiempos) diferentes a los reportados en la gráfica, siempre y cuando se trate de una interpolación. Sin embargo, si se necesita usar cualquiera de las constantes para un cálculo independiente dirigido a medir indirectamente otra cantidad, debe establecerse las cifras significativas que le corresponden. Un procedimiento conocido como* ***linealización*** *nos puede servir para realizar esta tarea, es por ello que, aunque el tema no aparezca desarrollado en este escrito, será objeto de estudio posteriormente.*